G1

Von der Änderungsrate zum Bestand

lokal · Detail · global · Summe

Kompetenzen

(1) Sie erkennen, dass durch Aufsummation von lokalen Änderungsraten ein Gesamteffekt bestimmt werden kann, und interpretieren diesen Gesamteffekt außermathematisch z.B. als zurückgelegter Weg, Gesamtkosten usw., geometrisch als Fläche. Sie wissen daher, dass sich mit Hilfe der Differentialrechnung lokale und mit Hilfe der Integralrechnung globale Aussagen machen lassen

(2) Sie schließen aus der obigen Erkenntnis, dass die Integration die Umkehrung der Differentiation ist, kennen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wissen um seine Bedeutung

(3) Sie können in einfachen Modellierungsaufgaben das Integral sachgerecht einsetzen und deuten, bestimmen in einfachen Fällen Integrale numerisch, berechnen Integrale von ganzrationalen Funktionen und sind in der Lage, den ermittelten Zahlenwert im Aufgabenkontext zu interpretieren.

Autoren: Winfried Euba
Jens Weitendorf

Version 1.1 vom 04.12.05

Arbeitsblätter & Aufgaben

Übersicht

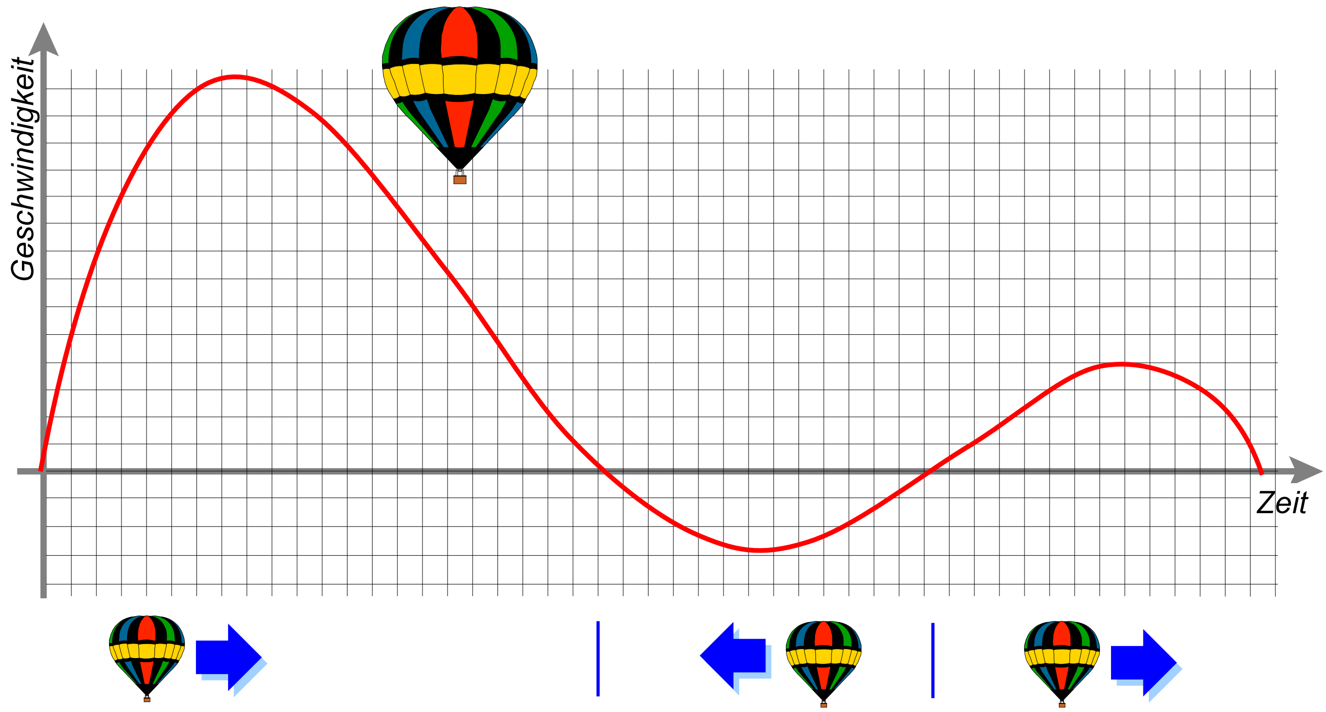
Arbeitsblätter

Aufgaben

Heißluftballon

Ein Heißluftballon ist eine längere Zeit in der Luft.
Zur Vereinfachung gelte die Annahme, dass er sich dort nur in einer Richtung fortbewegt bzw. in entgegengesetzter Richtung, wenn der Wind dreht.
An Bord befindet sich ein Messgerät für die Geschwindigkeit, die der Ballon fährt.

Die Geschwindigkeit wird jetzt in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit in ein Koordinatensystem eingetragen, Rückwärtsfahrt mit „negativer“ Geschwindigkeit gekennzeichnet. Es ergibt sich vom Start bis zur Landung des Ballons dabei folgendes Schaubild:



a) *Treffen Sie zur Beantwortung der folgenden Aufgabe geeignete Annahmen.*

Beschreiben Sie die Fahrt auf der Grundlage des obigen Graphen.
Wie groß war der zurückgelegte Weg?
Wie weit ist der Ballon bei der Landung vom Ort des Starts entfernt?

b) Geben Sie eine Möglichkeit an, aus der Kenntnis des Verlaufs der Geschwindigkeit eines Objekts auf dessen zurückgelegten Weg zu schließen.

Sie haben festgestellt, dass

- zur Ermittlung des zurückgelegten Weges die drei Flächenstücke zwischen der Kurve und der Zeit-Achse näherungsweise berechnet und addiert werden müssen

Gesucht ist ein Produkt: Zeit · Geschwindigkeit (= Weg). Geometrisch ergibt sich daher eine (Rechteck-) Fläche. Die Fläche steht zumeist stellvertretend für gesuchte Größen.

- zur Ermittlung der Entfernung zwischen Abfahrts- und Aufprall-Ort das Maß der Fläche unterhalb der x-Achse als negativ zählt, da der Ballon während dieses Zeitraumes rückwärts fährt

Flächenteile unterhalb der x-Achse ergeben negative Werte. Daher wird zumeist über eine Nullstelle der Funktion nicht hinweg gerechnet.

- das Flächenmaß ermittelt werden kann, indem man die Fläche mit bekannten Flächen (Dreieck, Rechteck, Trapez, ...) möglichst gut auslegt und deren Flächenmaße addiert

Basis für numerisches Verfahren

- statt dessen – sofern der Term des Graphen der Ballongeschwindigkeit bekannt ist – obige Werte direkt berechnet werden können:
  Der Term sei f(x). Gesucht ist dann der Funktionsterm F(x) der zugehörigen Weg/Zeit-Funktion mit der Ableitung $F'(x) = f(x)$, denn die Geschwindigkeit ist die Ableitung der Weg/Zeit-Funktion.
  Der zurückgelegte Weg in den Etappen ergibt sich dann durch $F(x_{ZIEL}) - F(x_{START})$.

F mit $F'(x) = f(x)$ heißt **Stammfunktion** von f. Sie existiert für jedes Polynom.

Das Finden einer Stammfunktion ist also **rückwärts differenzieren**

Das alles beinhaltet der

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

(1) **Berechnung**

Ist F eine Stammfunktion zu f (also $F'(x) = f(x)$), so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(2) **Existenz** (vorläufig)

Das Integral existiert für jedes Polynom.

- *Sprich: „Integral von a bis b f(x) dx".*
  Der zu integrierende Term heißt Integrand. Das dx kennzeichnet das Ende des Integranden und gibt zugleich an, welcher Buchstabe die Variable ist. Hier ist es x.

Hinweise zu (1) Berechnung des Integrals

- *Die Integralrechnung basiert auf der Umkehrung der Differentialrechnung.*
- *Der Zahlenwert, den das Integral ergibt, ist das Maß der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse in den Grenzen von a bis b („Begrenzungslinien" parallel zur y-Achse). Flächenteile unterhalb der x-Achse erhalten negative Zahlenwerte.*
- *Die Fläche interessiert zumeist nicht selbst, denn das Flächenmaß steht stellvertretend für die gesuchte Größe.*
- *Die Existenzaussage wird im Themenbereich G4 erweitert.*

Hinweis zu (2) Existenz: wann kann man das Integral (theoretisch) berechnen?

Beweisen Sie die beiden folgenden Integrationsregeln:

Summenregel $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Faktorregel $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot \int_a^b f(x)\,dx$

(c beliebige Konstante)

Wie lautet die Stammfunktion für ein Polynom?

Ermitteln Sie eine Stammfunktion für

- $f_1(x) = x^n$ ($n \in$ IN)
- $f_2(x) = a \cdot x^n$ ($a \in$ IR, $n \in$ IN)

Notieren Sie sich ein spezielles Polynom und geben Sie dafür die Stammfunktion an.

Eine Stammfunktion für $f(x) = x^3$ ist

$F_1(x) = \frac{1}{4} x^4$,

aber auch $F_2(x) = \frac{1}{4} x^4 + 2$,

denn $F_1'(x) = F_2'(x) = x^3$.

Warum spielt es keine Rolle, welche Stammfunktion für die Berechnung des Integrals nach dem Hauptsatz verwendet wird?

normalerweise wählt man die Stammfunktion ohne konstanten Summanden

Grundvorstellungen
von Differential- und Integralrechnung im Vergleich

aufleiten meint *differenzieren rückwärts*

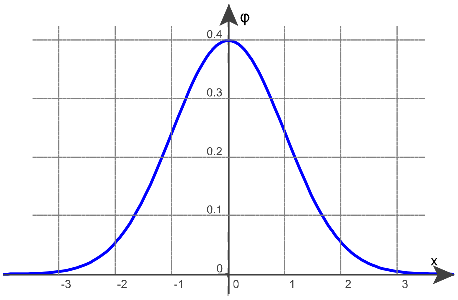
Differentialrechnung (Ableitung)	Integralrechnung (Aufleitung)
Geschwindigkeit	zurückgelegter Weg
Beschleunigung	Geschwindigkeit
Wachstum	Bestand
Grenzsteuer	Steuer
Kraft	Arbeit
Oberfläche	Volumen
lokale Änderung	Summe *von verallgemeinerten Produkten*
	Durchschnitt
Steigung	Flächenmaß

Numerische Integration

Die Existenzaussage beim Hauptsatz bedeutet lediglich, dass das Integral mit der angegebenen Berechnungsmethode theoretisch gelöst werden kann. Bei Polynomen gibt es da keine Schwierigkeiten, denn zu jedem Polynom kann nach den Regeln eine Stammfunktion ermittelt werden.
Funktionsklassen, für die das Integral nicht existiert, treten in der Schule nicht auf. Aber Funktionen, für die man keine Stammfunktion findet, gibt es auch in der Schule. Die bekannteste ist wohl die Funktion

$$\varphi: x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

die in der Stochastik eine wichtige Rolle spielt: die Gauß-Funktion, deren Graph die Gaußsche Glockenkurve ist.
Da in der Stochastik Flächenteile unter dem Graphen von φ berechnet werden müssen, bleibt nur die Möglichkeit, dies näherungsweise *numerisch* zu tun.

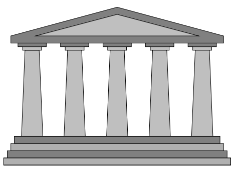


Es liegt ein Algorithmus vor, eine genaue Beschreibung des Verfahrens, die auch in Worte gefasst sein kann.

Überlegen Sie sich zunächst für ein einfaches Polynom ein Lösungsverfahren, so dass Sie testen können, wie gut Ihr Näherungswert ist.
Das Verfahren sollte aber so allgemein sein, dass
- es auf beliebige Funktionen anwendbar ist
- die Qualität des Näherungswertes ansatzweise erkennbar ist
- es leicht an Qualitätswünsche anpassbar ist.

Verfahren soll mit dem Computer verwendet werden können.

Testen Sie Ihr Verfahren dann an obiger Funktion φ.
DERIVE und andere vergleichbare Programme berechnen das Integral von φ automatisch mit einem numerischen Verfahren.



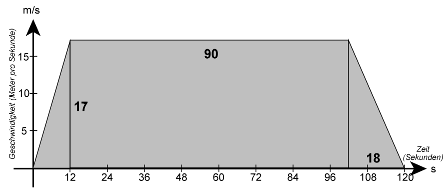
Historisches

Die „Fläche“, deren Maß wir berechnen wollen, ist ja meist ein Modell für irgendein zu lösendes Problem.
Im dreidimensionalen Fall handelt es sich bei den zu berechnenden Volumina oft direkt um das Problem, hier liegt sogar eine der Wurzeln der Integration. Besonders bekannt ist die Berechnung der Volumina von Fässern.

Der griechische Mathematiker HERON (Lebensdaten nicht genau bekannt, wahrscheinlich ca. 100 n. Chr.) beschreibt im Buch II seiner Vermessungslehre („Metrika“), wie man Volumina unregelmäßiger Körper feststellen kann:
„Transportable Körper soll man (nach Archimedes) in eine durchgängig rechtwinklige, mit Wasser gefüllte Wanne tauchen, wieder herausziehen und den leer gewordenen Raum in der Wanne messen.
Nichttransportable Körper soll man mit Wachs oder Lehm bestreichen, bis eine rechtwinklige Form herauskommt, die zu messen ist; dann soll man den Lehm abnehmen und wieder in rechtwinklige Form kneten. Die Differenz der beiden Volumina ist das Volumen des Körpers.“

Aufgabe 1

a) Ein Vorortzug beschleunigt seine Geschwindigkeit von 0 auf 17m/s in 12 Sekunden, dann fährt er mit dieser Geschwindigkeit 1 Minute und 30 Sekunden und bremst dann ab, um bei der nächsten Station zu halten. Die Fahrt zu dieser Station endet nach genau 2 Minuten.



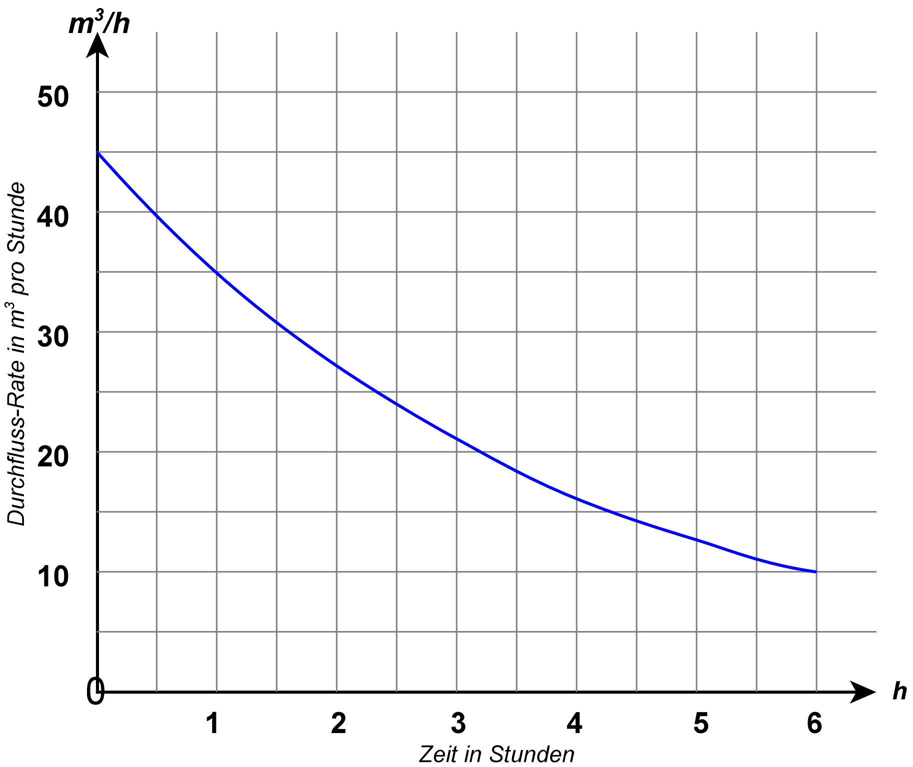
Verwenden Sie eine Skizze, um die Entfernung zwischen beiden Stationen zu finden.

b) Die Leistung eines Wasserboilers bestimmt das Maß, mit dem elektrische Energie in Wärme-Energie umgewandelt wird.
Für 2 Minuten arbeitet ein bestimmter Boiler mit der maximalen Leistung von 3600 Watt (Joule/s). In der folgenden Minute sinkt die Leistung kontinuierlich auf 1200 Watt. Dann schaltet sich das Gerät für 2 Minuten aus. Danach schaltet sich das Gerät wieder ein und leistet 3 Minuten lang konstant 2400 Watt.

Verwenden Sie eine Skizze, um den Energieverbrauch des Boilers in Kilojoule zu berechnen.

c) Durch ein Leck in einem Staudamm strömt Wasser. Der unten abgebildete Graph zeigt die Wasser-Rate, die durch dieses Leck fließt. Mit sinkendem Wasserstand nimmt auch die Durchflussrate ab.
Nach 6 Stunden gelingt es schließlich, das Leck zu schließen.

Ermitteln Sie, wie viel Wasser in den ersten 4 Stunden annähernd ausgetreten ist.

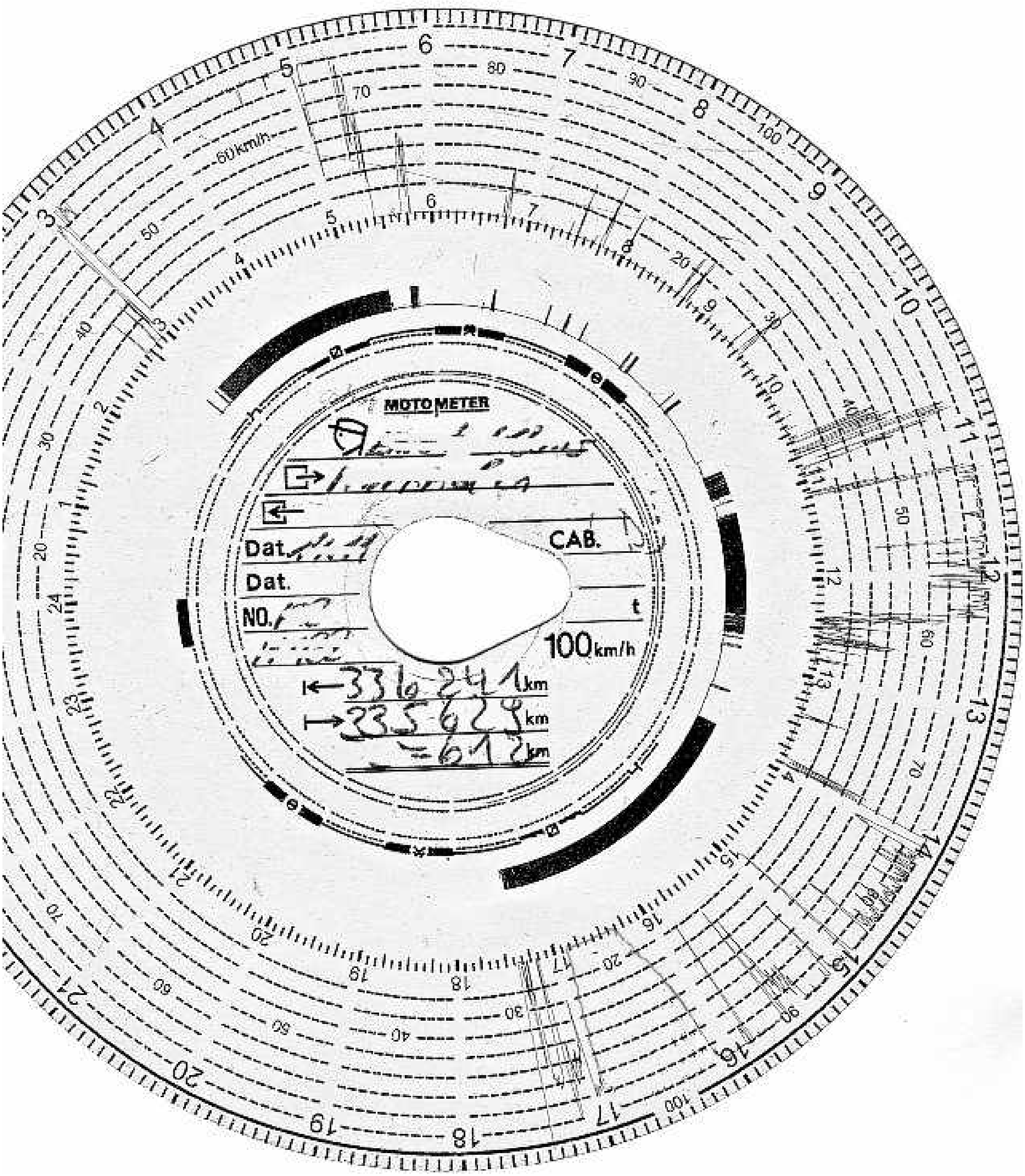


Aufgabe 2

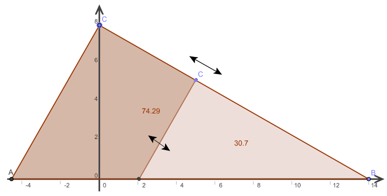
Bei einer LKW-Kontrolle wird auch die Tachoscheibe des Fahrtenschreibers von der Polizei überprüft.

Dabei können z.B. die Ruhezeiten und die gefahrene Höchstgeschwindigkeit abgelesen werden.
Als zusätzliche Kontrollzahl ist in der Mitte der Scheibe der Stand des Kilometerzählers beim Einlegen und beim Entfernen der Scheibe eingetragen.

Welche Schlüsse ziehen Sie aus der abgebildeten Scheibe und warum?



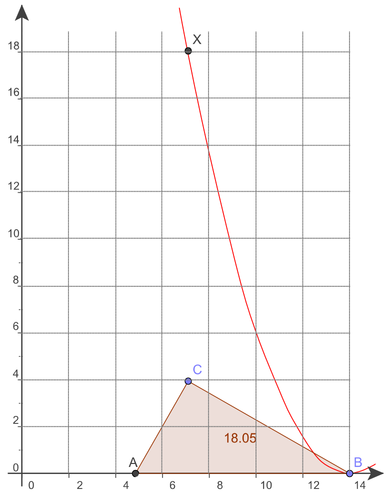
Aufgabe 3



Diese Aufgabe kann am besten mit Hilfe des Computers und einer geeigneten Software (z.B. DGS) gelöst werden.

Es geht um das Änderungsverhalten von Flächeninhalten.

Dazu zeichnet man z.B., wie in der Abbildung zu sehen, ein rechtwinkliges Dreieck so auf, dass der Eckpunkt C entlang der einen Kathete verschoben werden kann (und das Dreieck rechtwinklig bleibt).
Wie ändert sich jetzt der Flächeninhalt in Abhängigkeit von der x-Koordinate des Punktes C?

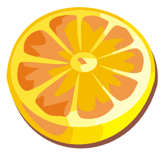


Um dies heraus zu finden, kann man etwa einen Punkt definieren, dessen x-Koordinate jene von C ist und dessen y-Koordinate das Flächenmaß angibt. Dann bewegt sich dieser Punkt auf einer Kurve, die mit dem Einschalten der Spur sichtbar wird.

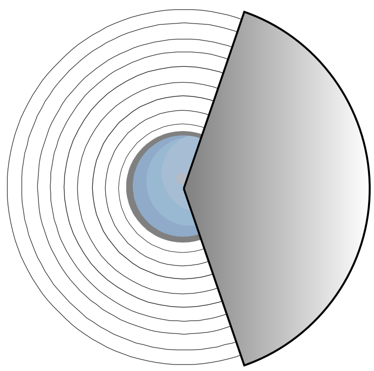
Finden Sie (näherungsweise) den Term dieser Funktion.
Legt man das Dreieck so wie in der Abbildung mit der Hypotenuse auf die x-Achse, ergibt sich ein recht einfacher Term.

Was beschreibt die gefundene Funktion?

Aufgabe 4



Wenn Sie z.B. eine Orange schälen, entfernen Sie von der (näherungsweise) Kugel eine mehr oder minder dicke Oberflächenschicht.



Umgekehrt könnte man eine Kugel herstellen, in dem man auf die vorhandene Oberfläche eine neue Oberfläche aufträgt und dies so oft wiederholt, bis die Kugel die gewünschte Größe erreicht hat.
Das bedeutet aus der Sicht der Mathematik, *dass die Aufsummation lokaler Änderungsraten hierbei einen Gesamteffekt bestimmt*.

Erläutern Sie dies mit Hilfe der Formeln für Volumen und Oberfläche einer Kugel.

$$V_{kugel}(r) = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \qquad O_{kugel}(r) = 4\pi\, r^2$$

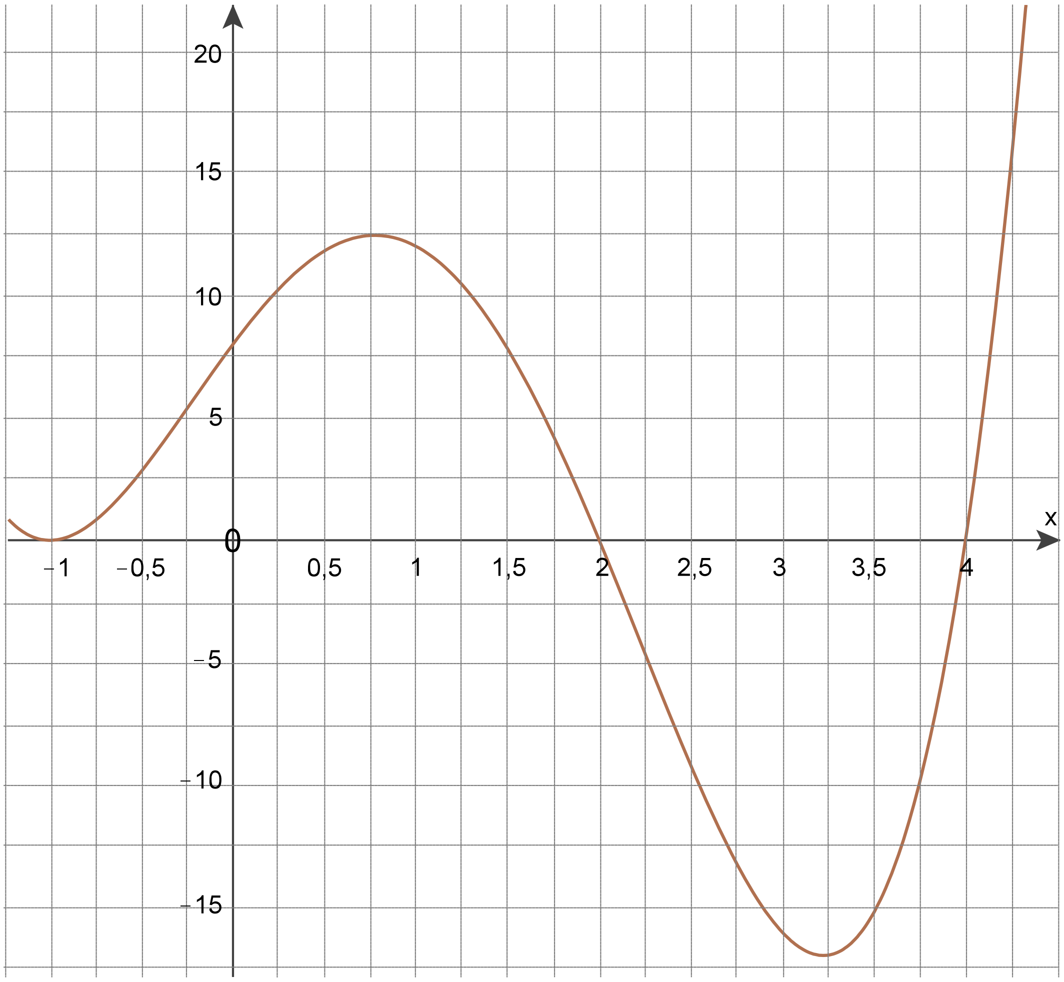
Aufgabe 5

Skizzieren Sie in das Koordinatensystem den Graphen einer passenden Stammfunktion.

Es kommt dabei nicht auf das Beachten möglichst korrekter y-Koordinaten an, es geht vielmehr um's Prinzip.

Beschreiben Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind und aus welchen Gründen.

„graphisch" Integrieren



Aufgabe 6

Wählen Sie die Grenzen a und b sowie eine Funktion f geeignet, damit gilt

Vielleicht zuerst mit einer Funktion mit sehr einfachem Term versuchen, dann mit einem etwas komplizierterem....

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2.$$

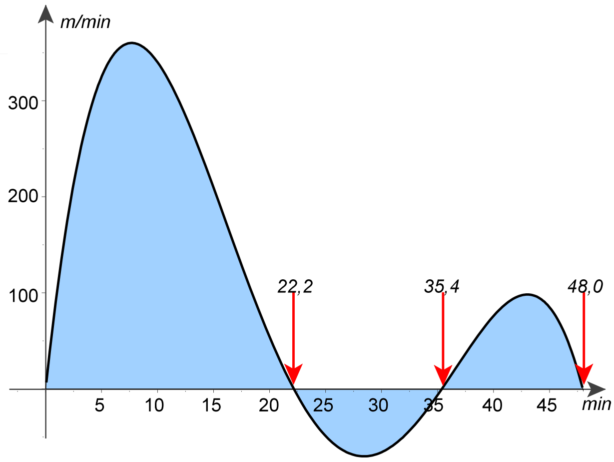
Aufgabe 7

Die Funktion f mit

$$f(x) = -0{,}0029x^4 + 0{,}306x^3 - 10{,}28x^2 + 109{,}1x$$

beschreibt näherungsweise die Ballonfahrt vom Arbeitsblatt 1, wenn man folgende Einheiten und Größen wählt:

x-Achse: Zeit in Minuten, je Kasten 1 min
y-Achse: Geschwindigkeit in Meter pro Minute, je Kasten 25 m



Berechnen Sie jetzt

a) den zurückgelegten Weg

b) die Entfernung zwischen Start- und Landeplatz.

Aufgabe 8

Nicht alle Menschen verfügen über dasselbe Einkommen. So haben etwa die ärmsten 10% der Deutschen weniger als 2% des Gesamteinkommens, während die reichsten 10% ungefähr 25% des Gesamteinkommens beziehen.

Die Einkommensverteilung kann mit einer *Lorenz-Kurve* gezeigt werden: Auf der x-Achse wird der prozentuale Anteil der Bevölkerung eingetragen (zunächst jener mit geringem Einkommen), auf der y-Achse der zu dieser Gruppe gehörige Anteil am Einkommen. Definitions- und Wertebereich der Kurve sind also jeweils [0,1].

benannt nach dem amerikanischen Mathematiker MAX OTTO LORENZ (1876 – 1956)

Würde jeder Einwohner dasselbe Einkommen haben, so wäre die Lorenz-Kurve die Winkelhalbierende w(x) = x. Die Fläche zwischen der Kurve f und der Winkelhalbierenden w ist offenbar ein Maß für die Ungleichverteilung von Einkommen einer Bevölkerung. Daher wird der *Gini-Koeffizient* (Koeffizient der Ungleichverteilung) verwendet, um die Einkommensverteilung zwischen verschiedenen Gesellschaften vergleichen zu können. Er ist definiert als

benannt nach dem italienischen Mathematiker CORRADO GINI (1884 – 1965)

$$\frac{\text{Fläche zwischen Lorenz-Kurve und Winkelhalbierender}}{\text{Fläche unterhalb der Winkelhalbierenden } w(x) = x}.$$

Für ein kleines Land sei die Lorenz-Kurve näherungsweise $f(x) = 0{,}2\,x^4 + 0{,}4\,x^3 + 0{,}4x^2$.

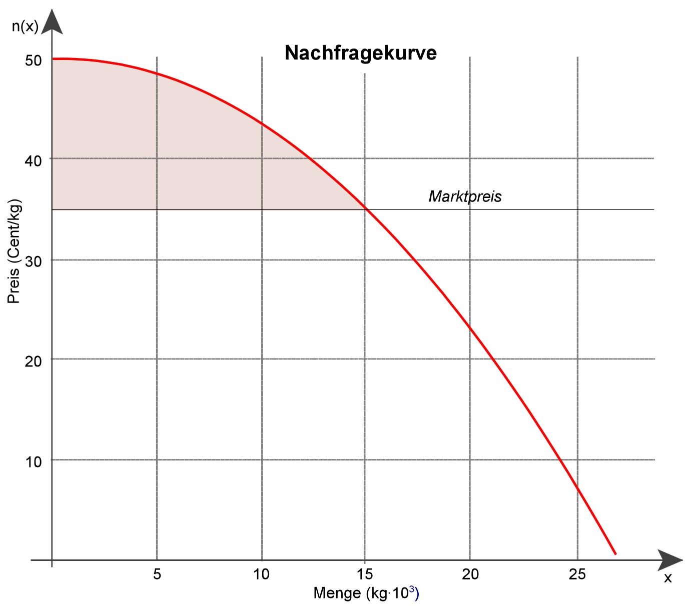
a) Zeichnen Sie die Lorenz-Kurve in ein Koordinatensystem.

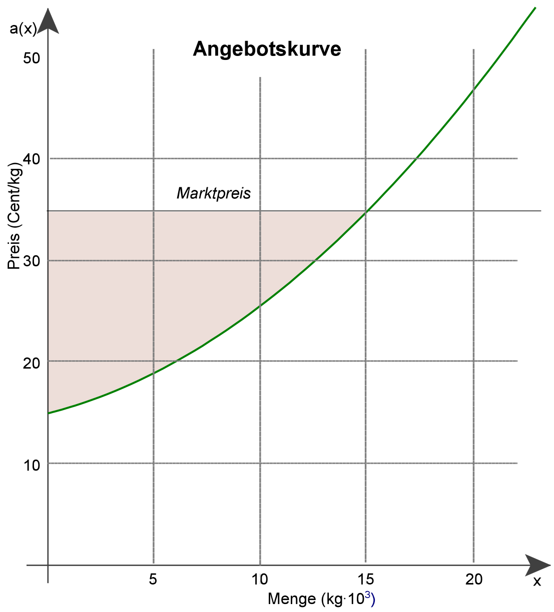
b) Wie viel Prozent des Gesamteinkommens haben die ärmsten 20%, wie viel die ärmeren 50% und wie viel die reicheren 20% der Bevölkerung?

c) Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten zur oben genannten Lorenz-Kurve.

d) Begründen Sie, warum das Flächenmaß zwischen zwei Kurven in einem Schritt als Integral über die Differenz der beiden Terme g(x) − f(x) berechnet werden kann, wobei g den oberen Graphen beschreibt, f den unteren. Dabei seien f(x) und g(x) im betrachteten Intervall nicht negativ und haben außer eventuell an den Randpunkten des Intervalls keine gemeinsamen Punkte.

Aufgabe 9





Die Nachfragekurve für ein landwirtschaftliches Produkt bezogen auf Norddeutschland hat die Gleichung

$n(x) = -0{,}071\,x^2 + 0{,}065\,x + 50,$

die Angebotskurve für das gleiche Produkt

$a(x) = 0{,}053x^2 + 0{,}53\,x + 15.$

Dabei ist x die nachgefragte bzw. angebotene Menge dieses Produktes in 1.000 kg und n(x) bzw. a(x) der Preis pro Kilogramm.

Die Kurven zeigen, dass es Konsumenten gibt, die auch zu einem höheren als dem Marktpreis einkaufen würden, und Produzenten, die diese Ware zu einem niedrigeren als dem Marktpreis anbieten würden.
Kaufen bzw. Verkaufen diese jetzt zum Marktpreis, sparen sie Kosten ein bzw. erzielen höhere Einnahmen. Dieser *Überschuss* ist von Interesse, denn er wird eventuell für andere Zwecke ausgegeben.

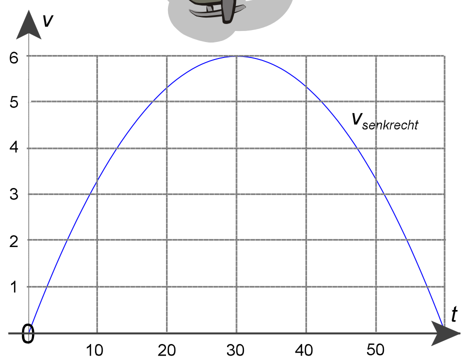
a) Begründen Sie, warum das Maß der markierten Fläche jeweils diesen Überschuss angibt und in welcher Einheit dies geschieht.

b) Berechnen Sie nun den Verbraucher- und den Anbieter-Überschuss.

Die **Nachfragekurve** zeigt, wie viel von einer Ware von den Konsumenten in Norddeutschland zu einem bestimmten Preis gekauft würde, also z.B. 10.000 kg bei einem Preis von 43 Cent pro kg, aber bei einem Preis von 20 Cent/kg würden die Verbraucher über 22.000 kg kaufen.
Die **Angebotskurve** zeigt die Situation aus der Sicht der Produzenten: unter 15 Cent/kg will niemand die Ware anbieten, zu einem Preis von 20 Cent/kg würde etwa eine Menge von 6.000 kg auf den Markt kommen.

Der **Marktpreis** pendelt sich (theoretisch) im Schnittpunkt der beiden Kurven ein, hier wird also bei einem Preis von 35 Cent/kg 15.000 kg der Ware angeboten.

Aufgabe 10



In nebenstehender Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen einer quadratischen Funktion zu sehen, der im Zeitintervall von 0 bis 60 s die Geschwindigkeit eines Helikopters in senkrechter Richtung $v_{senkrecht}$ (also sein Steigen bzw. Sinken) beschreibt.

Die waagerechte Achse stellt damit die Zeit t in s dar, die senkrechte Achse die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit v in m/s.

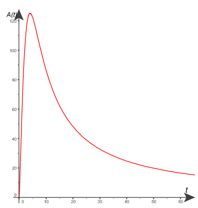
a) Zeigen Sie anhand der Informationen aus dem gegebenen Diagramm, dass der gezeigte Graph zur Funktion $v_{senkrecht}$ mit $v_{senkrecht}(t) = -\frac{1}{150}t^2 + \frac{2}{5}t$ gehört.
Beschreiben Sie das Flugverhalten in der Zeit von 0 s bis 60 s. Gehen Sie dabei auf die Nullstellen und den Hochpunkt der Funktion $v_{senkrecht}$ ein.

b) Begründen Sie, dass im gegebenen Diagramm die Fläche zwischen der t-Achse und dem Graphen der Funktion die Dimension einer Länge darstellt.
Skizzieren Sie die Form eines zu diesem Steigvorgang passenden Höhe-Zeit-Diagramms. Sie brauchen dabei die genaue Einteilung der senkrechten Achse (also der Höhe) nicht durchzuführen.
Diese von Ihnen eben skizzierte Funktion und $v_{senkrecht}$ stehen in einem mathematischen Zusammenhang. Geben Sie diesen Zusammenhang an.

c) Das abgebildete Steiggeschwindigkeits-Zeit-Diagramm kann zu vielen (aber „ähnlichen") Flugmanövern gehören.
Nennen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Flugbahnen (also der Höhe-Zeit-Diagramme).

Aufgabe 11

Bei einem gesunden Menschen werden nach einer Infektion Antikörper produziert.
Dabei ist $A(t) = \frac{1000t}{t^2+16}$ die Anzahl der Antikörper, die pro Sekunde vom Körper produziert werden und zwar t Sekunden nach Eintritt der Infektion.



Ist das Modell sinnvoll?

a) Beschreiben Sie den zur Funktion A gehörenden Graphen im Sachkontext der Aufgabe.

b) Berechnen Sie die Gesamtzahl der Antikörper, die nach diesem Modell

- innerhalb der ersten Minute
- innerhalb der ersten Stunde
- am ersten Tag

nach der Infektion produziert wird.
Eine Stammfunktion zu A hat den Term $500 \cdot \ln(t^2 + 16)$.

Aufgabe 12

In einer kleinen Fabrik werden Schuhe in Handarbeit produziert. Die Grenzkosten der Produktion sind gegeben durch

$$K(n) = \frac{n \cdot \sqrt{n^2 + 2500}}{1000} + 20.$$

Dabei ist n die Anzahl der produzierten Paare und K(n) sind die Kosten für das n-te Paar in Euro.
Die Fixkosten betragen 2.000 €.

a) Skizzieren Sie den Graphen zu K und interpretieren Sie ihn im Sachkontext der Aufgaben.

Überprüfen des Modells

b) Berechnen Sie die durchschnittlichen Kosten bei einer Produktion von 20, 50, 145, 200 und 300 Paaren.

Eine Stammfunktion zu K hat den Term $\frac{(n^2 + 2500)^{1,5}}{3000} + 20n$

c) Berechnen Sie den Term für die Funktion der durchschnittlichen Kosten. Skizzieren Sie die Funktion im Koordinatensystem mit dem Graphen zu K.

Aufgabe 13

Im Rahmen einer Steuerreform soll der Eingangssteuersatz von derzeit 16% auf 12% gesenkt und der Grundfreibetrag von 7664 € auf 8000 € erhöht werden.
Der Spitzensteuersatz soll von derzeit 45% auf 39% gesenkt werden.

Spitzensteuersatz beginnt bisher bei zu versteuernden Einkommen ab 52.152 €

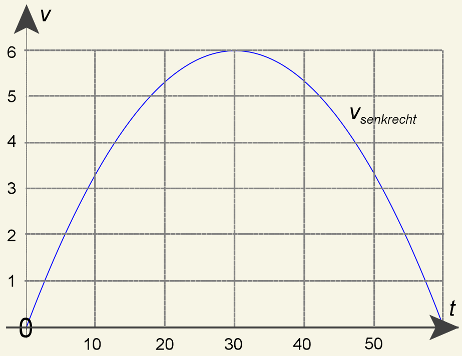
Ein Alleinstehender hat ein zu versteuerndes Jahreseinkommen von 30.000 €.
Berechnen Sie die Höhe der Steuern für diese Person nach obigem Modell.

Das Modell ist unvollständig, Sie müssen erst geeignete Annahmen treffen, um überhaupt rechnen zu können.

Wie sieht es zwischen Eingangssteuersatz und Spitzensteuersatz aus?

14. Abituraufgabe Helikopter (enthält Aufgabe 10)

In der folgenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen einer quadratischen Funktion zu sehen, der im Zeitintervall von 0 bis 60 s die Geschwindigkeit eines Helikopters in senkrechter Richtung $v_{senkrecht}$ (also sein Steigen bzw. Sinken) beschreibt.
Die waagerechte Achse stellt damit die Zeit t in s dar, die senkrechte Achse die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit v in m/s.



a) Zeigen Sie anhand der Informationen aus dem gegebenen Diagramm, dass der gezeigte Graph zur Funktion $v_{senkrecht}$ mit
$v_{senkrecht}(t) = -\frac{1}{150}t^2 + \frac{2}{5}t$ gehört.
Beschreiben Sie das Flugverhalten in der Zeit von 0 s bis 60 s. Gehen Sie dabei auf die Nullstellen und den Hochpunkt der Funktion $v_{senkrecht}$ ein.

b) Begründen Sie, dass im gegebenen Diagramm die Fläche zwischen der t-Achse und dem Graphen der Funktion die Dimension einer Länge darstellt.
Skizzieren Sie die Form eines zu diesem Steigvorgang passenden Höhe-Zeit-Diagramms. Sie brauchen dabei die genaue Einteilung der senkrechten Achse (also der Höhe) nicht durchzuführen.
Diese von Ihnen eben skizzierte Funktion und $v_{senkrecht}$ stehen in einem mathematischen Zusammenhang. Geben Sie diesen Zusammenhang an.

c) Das abgebildete Steiggeschwindigkeits-Zeit-Diagramm kann zu vielen (aber „ähnlichen") Flugmanövern gehören. Nennen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Flugbahnen (also der Höhe-Zeit-Diagramme).

d) Berechnen Sie die durchschnittliche Steiggeschwindigkeit des Helikopters in der Zeit von 0 s bis 60 s und den Gesamthöhenunterschied, den der Helikopter in dieser Zeit durchfliegt!

Nehmen Sie jetzt an, der Helikopter startet im Zeitpunkt t = 0 vom Flugfeld.
Ein kleines motorisiertes Flugobjekt (eine sogenannte Drohne), das eine Kamera trägt, steigt ebenfalls vom Flugfeld nach der Funktionsgleichung

$$h_v(t) = v \cdot (t - 30) + 120$$

auf, wobei wiederum t die Zeit in Sekunden beschreibt, $h_v(t)$ die Flughöhe in Metern angibt und die Steiggeschwindigkeit v verschiedene Werte (jeweils in m/s) annehmen kann. Diese Aufsteig-Funktion ist so gewählt, dass die Drohne bei t = 30 s eine Höhe von 120 m erreicht; Drohne und Helikopter starten nicht unbedingt gleichzeitig.

e) Beschreiben Sie die möglichen Flugbahnen der Drohne im Vergleich / im Unterschied zum Helikopter.
Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters v.
Zeichnen Sie in Ihr Höhe-Zeit-Diagramm mindestens zwei mögliche Höhe-Zeit-Funktionen für die Drohne.
Zeigen Sie, dass Helikopter und Drohne sich unabhängig von v zum Zeitpunkt t = 30 s auf gleicher Höhe befinden.

f) Geben Sie die Steiggeschwindigkeit v der Drohne so an, dass Drohne und Helikopter zu genau einem Zeitpunkt die gleiche Steiggeschwindigkeit aufweisen.
Können die Flugobjekte auch an mehreren Zeitpunkten die gleiche Steiggeschwindigkeit haben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Alternative Teilaufgabe:

g) Eine Drohne soll ebenfalls auf dem Flugfeld starten und sich genau nach 15 Sekunden neben dem Helikopter befinden, um den Helikopter von der Seite zu photographieren.
Bestimmen Sie die erforderliche Drohnen-Steiggeschwindigkeit v, den Zeitpunkt, zu dem die Drohne starten muss, sowie die Höhe, in der sich die Drohne neben dem Helikopter befindet.
Begründen Sie: Kann diese Drohne auf ihrem Flug noch mehr Bilder liefern, bei denen sie genau neben dem Helikopter ist?