Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2006/2007

Grundkurs Mathematik

Gymnasien, Gesamtschulen, berufsbildende Gymnasien

12. Februar 2007, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

Diese Unterlagen sind <u>nicht</u> für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines
2 Rückmeldebogen
3 Hinweise für die Auswahl der Aufgaben
4 Hinweise zum Korrekturverfahren
5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und die Bewertung für jede Aufgabe

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen <u>nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer</u>, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **240 Minuten.** Eine Einlesezeit von bis zu 30 Minuten kann gewährt werden. In dieser Zeit dürfen die Aufgaben aber noch nicht bearbeitet werden.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an B 1-Z faxen!

Behörde für Bildung und Sport
B 1-Z

Schulchiffre:

Fax 42 79 67-006

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Grundkurs **Kurs-Nummer:** ________________

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: ________________

Unterschrift: ____________________________________

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **genau drei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten drei Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 300 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 285	≥ 95 %	15
≥ 270	≥ 90 %	14
≥ 255	≥ 85 %	13
≥ 240	≥ 80 %	12
≥ 225	≥ 75 %	11
≥ 210	≥ 70 %	10
≥ 195	≥ 65 %	9
≥ 180	≥ 60 %	8

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 165	≥ 55 %	7
≥ 150	≥ 50 %	6
≥ 135	≥ 45 %	5
≥ 120	≥ 40 %	4
≥ 99	≥ 33 %	3
≥ 78	≥ 26 %	2
≥ 57	≥ 19 %	1
< 57	< 19 %	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Abiturprüfung 2007

Bewertungsbogen Erstkorrektur

Schulchiffre			**BeBo EKo M**
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE →	

Bewertungstext

Notenpunkte →

Abiturprüfung 2007

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

Schulchiffre		BeBo ZKo M	
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE →	

Bewertungstext

Notenpunkte →

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

ANALYSIS 1

I.1 Gewinnanalyse

Ein Unternehmen stellt Motoren her. Es wird davon ausgegangen, dass die gesamte monatliche Produktion auch tatsächlich abgesetzt werden kann. Die monatlichen Gesamtkosten für die Produktion hängen von der Anzahl der produzierten Motoren x ab und werden in Abhängigkeit von dieser Anzahl durch eine Kostenfunktion K beschrieben. Über die Kostenentwicklung sind folgende Informationen bekannt:

Produktion von x Motoren pro Monat	0	50	100
Gesamtkosten $K(x)$ in € pro Monat	500 000	757 500	940 000

a) Bestätigen Sie anhand der gegebenen Informationen, dass die Gesamtkosten nicht durch die Gleichung einer linearen Funktion dargestellt werden können.

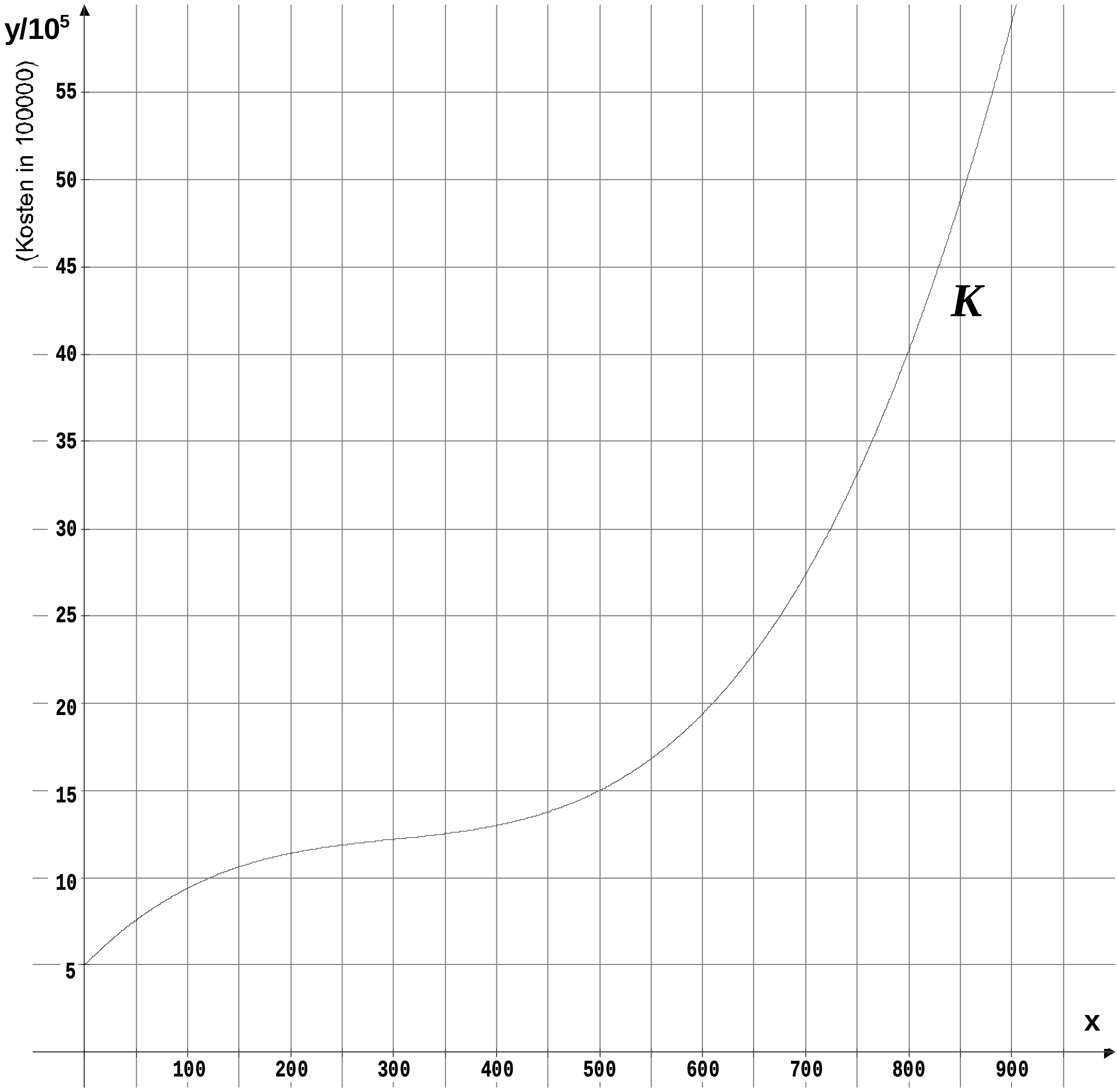
b) Den Produktionsplanern ist bekannt, dass bei einer Produktion von 100 Motoren der Kostenzuwachs pro zusätzlich produziertem Motor (Grenzkosten) 3 000 € / Stück beträgt.
Bestätigen Sie nun, dass $K(x) = 0{,}02x^3 - 18x^2 + 6\,000x + 500\,000$, $x \in \mathbb{N}$, unter den oben genannten Vorgaben die Gleichung einer „passenden“ Kostenfunktion darstellt.
Der Graph von K ist in der Anlage dargestellt.

c) Die Unternehmensleitung hat sich zum Ziel gesetzt, ab einer Stückzahl von 200 Motoren mindestens kostendeckend zu produzieren.
- Bestimmen Sie den Verkaufspreis, der pro Motor festgelegt werden muss, um dieses Ziel zu erreichen. [Zur Kontrolle: p = 5 700 €.]
- Geben Sie die Gleichung der Erlösfunktion E an und zeichnen Sie den Graphen von E in das Koordinatensystem in der Anlage.
[*Hinweis*: Erlös = Preis mal Menge.]
- Geben Sie mit Hilfe der Graphik den Produktionsbereich an, in dem der Erlös größer ist als die Kosten.

d) Der Gewinn eines Unternehmens ergibt sich aus der Differenz von Erlös und Kosten.
Bestimmen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G und ermitteln Sie die Absatzmenge x, für die der Gewinn maximal ist. Berechnen Sie diesen Maximalgewinn.

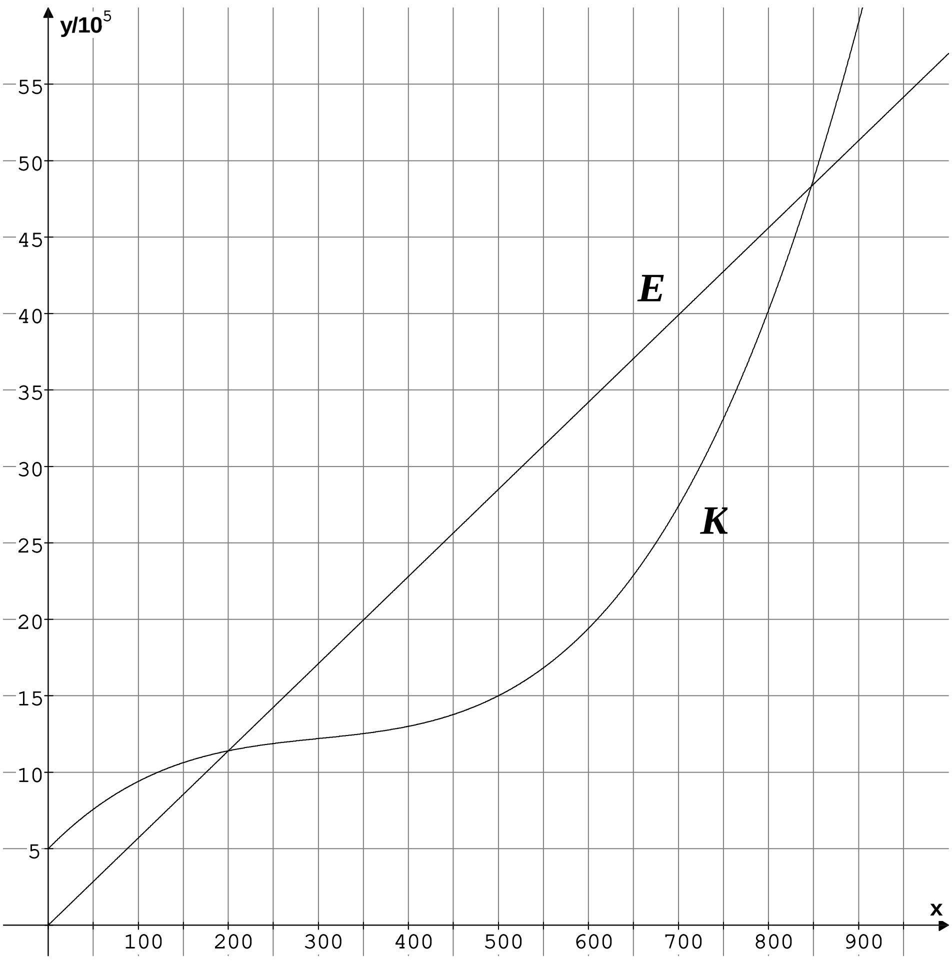
e) Durch Absatzschwierigkeiten gerät das Unternehmen in die Krise. Die Geschäftsleitung erwägt eine Preissenkung. Ermitteln Sie – mit Hilfe der Graphik oder durch Rechnung – jene Preisuntergrenze, die die Gesamtkosten gerade noch deckt.

Anlage zur Aufgabe „Gewinnanalyse“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Wertepaare $(0 \mid 500\,000)$, $(50 \mid 757\,500)$ und $(100 \mid 940\,000)$ sind gegeben. Zu prüfen ist, ob diese Punkte auf einer Geraden liegen. Lägen die Punkte auf einer Geraden, müsste gelten: $\frac{757500-500000}{50} = \frac{940000-757500}{50}$. Dies ist nicht der Fall, womit die Behauptung bestätigt wäre. *Natürlich sind zur Lösung auch andere Wege zulässig, wie z.B.* $K(x) = a \cdot x + b$. Wegen $K(0) = 500\,000$ gilt: $b = 500\,000$. $(100 \mid 940\,000)$ eingesetzt ergibt: $940\,000 = a \cdot 100 + 500\,000$ und $100a = 440\,000$ und damit $a = 4\,400$. Danach gilt: $K(x) = 4\,400x + 500\,000$. Durch Einsetzen des dritten Punktes wird deutlich, dass die ermittelte Gleichung nicht zutrifft. $K(50) = 4\,400 \cdot 50 + 500\,000 = 720\,000 \neq 757\,500$.	10		
b)	$K(x) = 0{,}02x^3 - 18x^2 + 6\,000x + 500\,000$. $K(0) = 500\,000$ ist richtig. $K(50) = 0{,}02 \cdot 50^3 - 18 \cdot 50^2 + 6\,000 \cdot 50 + 500\,000 = 757\,500$ ist richtig. $K(100) = 0{,}02 \cdot 100^3 - 18 \cdot 100^2 + 6\,000 \cdot 100 + 500\,000 = 940\,000$ ist richtig. $K'(100) = 0{,}06 \cdot 100^2 - 36 \cdot 100 + 6\,000 = 3\,000$ ist richtig. Damit erfüllt die Funktion K erfüllt alle genannten Vorgaben. *Natürlich ist die Überprüfung durch Lösen eines LGS ebenso zulässig.*	15	5	
c)	Bei einer Produktion von 200 Motoren soll kostendeckend produziert werden: $K(200) = 0{,}02 \cdot 200^3 - 18 \cdot 200^2 + 6\,000 \cdot 200 + 500\,000 = 1\,140\,000$. Zur Deckung der Produktionskosten muss ein Preis von $p = \frac{K(200)}{200}$ € $= 5\,700$ € festgelegt werden. Die Gleichung der Erlösfunktion E lautet danach $E(x) = 5\,700 \cdot x$. Der gesuchte Produktionsbereich beginnt bei einer Produktion $x = 201$ und endet bei einer Produktion von $x \approx 850$ (*rechnerischer Wert: 847,49…*).			

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung,
Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

<u>Gleichung der Gewinnfunktion G:</u>

$G(x) = E(x) - K(x)$,

$G(x) = 5\,700x - (0{,}02x^3 - 18x^2 + 6\,000x + 500\,000)$,

$G(x) = -0{,}02x^3 + 18x^2 - 300x - 500\,000$.

Berechnung des Gewinnmaximums:

$G'(x) = -0{,}06x^2 + 36x - 300$

Für $G'(x) = 0$ erhält man

$-0{,}06x^2 + 36x - 300 = 0$

$x^2 - 600x + 5\,000 = 0$

$x_{1,2} = 300 \pm \sqrt{90\,000 - 5\,000}$

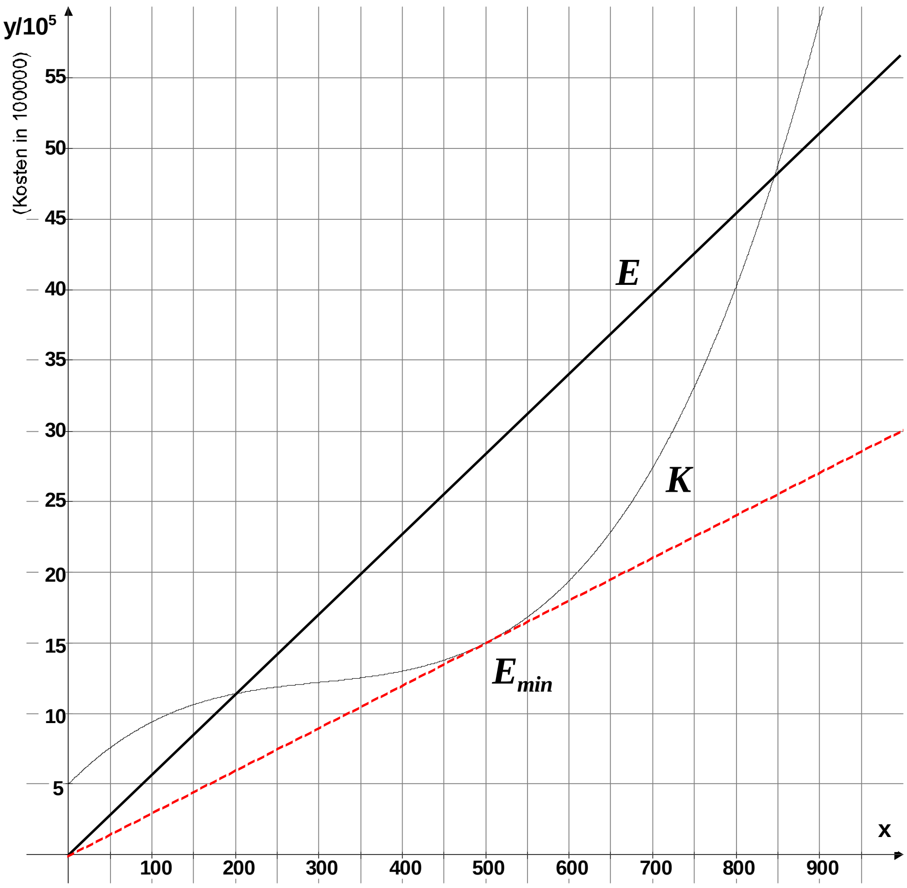
$x_1 = 591{,}547...$

$x_2 = 8{,}452...$

Der Zeichnung in c) ist zu entnehmen, dass das Gewinnmaximum nur an der Stelle $x \approx 591{,}5$ liegen kann.

Natürlich kann auch über die 2. Ableitung argumentiert werden.

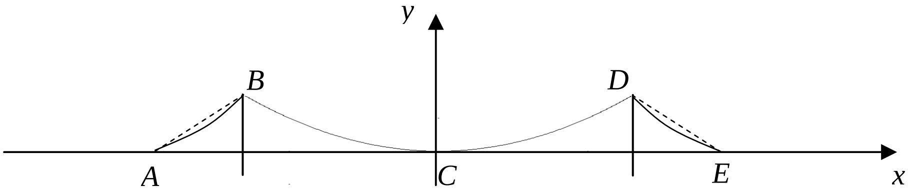
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Gewinn bei 591 Motoren: 1 481 256,58 €. Gewinn bei 592 Motoren: 1 481 258,24 €. Bei Produktion und Verkauf von 592 Motoren wird der maximal mögliche Gewinn von 1 481 258,24 € erreicht.		25	
e)	Durch Anlegen der Tangente an den Graphen von *K* lassen sich folgende Daten ermitteln: Bei einer Produktion von 500 Motoren und Kosten in Höhe von 1 500 000 € kann kostendeckend gearbeitet werden. Daraus ergibt sich ein minimaler Preis von $p = \frac{1\,500\,000\ €}{500} = 3\,000\ €$. Der Verkaufspreis kann also bis auf 3 000 € reduziert werden, so dass noch eine kostendeckende Produktion möglich ist. *Ein Gewinn G > 0 ist dann allerdings nicht mehr möglich.* 			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<u>*Lösungsvariante:*</u> *Gesucht ist jener Preis p, der die (minimalen) Stückkosten gerade noch deckt:* *Stückkosten:* $\frac{K(x)}{x} = 0{,}02x^2 - 18x + 6\,000 + \frac{500\,000}{x}$ *Berechnung des Stückkostenminimums:* $\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 0{,}04x - 18 - \frac{500\,000}{x^2}$ $0{,}04x - 18 - \frac{500\,000}{x^2} = 0$ $x^3 - 450x^2 - 12\,500\,000 = 0$ $(x-500)\cdot\left(x^2 + 50x + 25\,000\right) = 0$. *Diese Gleichung hat genau eine reelle Lösung, nämlich x = 500.* *Das Stückkostenminimum wird bei einer Produktion von 500 Motoren erreicht und beträgt* $\frac{K(500)}{500} = 0{,}02\cdot 500^2 - 18\cdot 500 + 6\,000 + \frac{500\,000}{500} = 3\,000$. *Soll der Stückpreis die Stückkosten decken, muss er mindestens 3 000 € betragen.*			20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

ANALYSIS 2

I.2 Hängebrücken



Die Abbildung zeigt eine Skizze einer Hängebrücke. Von der Brücke sind folgende Daten bekannt:

Die Punkte B und D liegen jeweils 152 m über der Fahrbahn und sind 1 280 m voneinander entfernt. Die Gesamtlänge der Fahrbahn zwischen den Punkten A und E beträgt 1 850 m.

a) Berechnen Sie die Entfernung der Punkte A und B bzw. D und E voneinander (gestrichelte Linie).

Der Verlauf der Trageseile der Brücke, die in der Skizze gezeichnet sind, kann mit verschiedenen mathematischen Modellen beschrieben werden. Dazu wird ein kartesisches Koordinatensystem mit Punkt C als Koordinatenursprung festgelegt. Eine Längeneinheit entspricht 1 m.

Die Punkte A, C und E der Fahrbahn liegen auf der x-Achse.

Der Verlauf der Trageseile zwischen B und D wird näherungsweise durch den Graphen einer Funktion beschrieben, der durch diese beiden Punkte geht und die Fahrbahn im Punkt C berührt.

Hinweis: Bei den Berechnungen müssen die Einheiten nicht mitgeschrieben werden.

b) In einem ersten Modell wird der Verlauf der Trageseile zwischen den Punkten B und D näherungsweise mithilfe des Graphen einer quadratischen Funktion f beschrieben.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion f.

c) Bei Verwendung eines zweiten Modells wird der Verlauf der Trageseile zwischen den Punkten *B* und *D* durch den Graphen der Funktion *k* beschrieben:

$$k(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax}) - \frac{1}{a}, \quad a > 0.$$

- Bestätigen Sie, dass der Graph dieser Funktion *k* für jeden Wert *a* achsensymmetrisch zur *y*-Achse ist und durch den Punkt *C* geht.
- Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion *k* auch die Punkte *B* und *D* enthält, wenn für *a* ein Wert eingesetzt wird, der zwischen 0,00072 und 0,00073 liegt.

Soweit in folgenden Teilaufgaben benötigt, verwenden Sie $a = 0{,}00073$.

d) Zu Wartungszwecken soll ein Wagen angeschafft werden, der bis zu einem maximalen Steigungswinkel von 28,1° auf dem Trageseil der Brücke entlang fahren kann.

Untersuchen und beurteilen Sie, ob der Wagen jeden Punkt der Trageseile zwischen *A* und *E* erreichen kann.

e) Die Länge *L* des Trageseils zwischen den Punkten *B* und *D* kann mit der Formel

$$L = \frac{1}{2} \cdot \int_{-640}^{640} (e^{ax} + e^{-ax})dx$$

berechnet werden.

Bestimmen Sie die Länge *L* und runden Sie auf einen ganzzahligen Wert.

f) Zeigen Sie durch eine grobe Abschätzung, dass Ihr in Aufgabenteil e) ermitteltes Ergebnis für *L* in einem realistischen Bereich liegt.

Falls Sie in Aufgabenteil e) kein Ergebnis ermittelt haben, machen Sie eine grobe Abschätzung für die Länge des Kurvenstücks *L*.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Aus Symmetriegründen gilt: $\lvert AB\rvert = \lvert DE\rvert$. $\overline{AB}$ ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen 152 m bzw. (1 850 m – 1 280 m) : 2 = 285 m. $\lvert AB\rvert = \sqrt{285^2 + 152^2} = 323$. Die Punkte *A* und *B* (bzw. *D* und *E*) sind 323 m voneinander entfernt.	10		
b)	$f(x) = ax^2 + b$ mit $b = 0$, da der Punkt *C* auf der *x*-Achse liegt. Durch Einsetzen der Koordinaten von *D* erhält man $152 = a \cdot 640^2 \Leftrightarrow a = \frac{19}{51200}$. Die Funktion hat die Gleichung $f(x) = \frac{19}{51200} x^2$.		10	
c)	<u>Bedingung für Achsensymmetrie:</u> $k(x) = k(-x)$ $k(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax}) - \frac{1}{a}$ $= \frac{1}{2a} \cdot (e^{-a\cdot(-x)} + e^{a\cdot(-x)}) - \frac{1}{a}$. $= \frac{1}{2a} \cdot (e^{a\cdot(-x)} + e^{a\cdot x}) - \frac{1}{a}$ $= k(-x)$ <u>Prüfung für *C*(0|0):</u> $k(0) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{a\cdot 0} + e^{-a\cdot 0}) - \frac{1}{a}$ $= \frac{1}{2a} \cdot (1+1) - \frac{1}{a}$. $= \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$ <u>Prüfung für *D*(640|152) und *a* = 0,00072</u>: $k(640) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}00072} \cdot (e^{0{,}00072 \cdot 640} + e^{-0{,}00072 \cdot 640}) - \frac{1}{0{,}00072} \approx 150{,}083...$ <u>Prüfung für *D*(640|152) und *a* = 0,00073:</u> $k(640) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}00073} \cdot (e^{0{,}00073 \cdot 640} + e^{-0{,}00073 \cdot 640}) - \frac{1}{0{,}00073} \approx 152{,}243...$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Wegen 150,083 < 152 < 152,243 ist der Nachweis erbracht. Wegen der Achsensymmetrie gilt die Aussage auch für den Punkt *B*.	10	15	
d)	Steigungswinkel der Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{DE}$: $\tan\alpha = \frac{152}{285}$ $\alpha = \arctan\frac{152}{285}$ $\alpha = 28{,}072...$ Da die Kabel zwischen *A* und *B* bzw. *D* und *E* in der Realität nicht entlang der geraden Verbindung verlaufen, sondern einen Durchhang haben müssen, ist ihre maximale Steigung in der Nähe der Punkte *B* bzw. *D* deutlich größer als 28,07° sein, auch deutlich größer als 28,1°. Daher kann der Wagen auf den Kabelabschnitten zwischen *A* und *B* bzw. *D* und *E* <u>nicht</u> eingesetzt werden. Der Wagen kann nicht jeden Punkt des Trageseils zwischen A und E erreichen. *Die Aufgabe ist damit gelöst, da die Fragestellung beantwortet werden konnte. Wird dagegen <u>nur</u> die nachfolgende Teillösung erbracht, so kann dafür maximal die Hälfte der Gesamtpunktzahl (hier: 13 Punkte) gegeben werden. Die Höhe der Punktzahl hängt maßgeblich davon ab, ob in der Beurteilung des Ergebnisses der Rechnung deutlich wird, dass die Abschnitte von A nach B bzw. von D nach E noch zu untersuchen sind.* Maximaler Steigungswinkel des Graphen von *k* im Punkt *D*: $k(x) = \frac{1}{2a}\cdot\left(e^{ax} + e^{-ax}\right) - \frac{1}{a}$ $k'(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{ax} - e^{-ax}\right)$ $k'(640) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{0{,}00073\cdot 640} - e^{-0{,}00073\cdot 640}\right) = 0{,}484...$. $\beta \approx \arctan 0{,}484 \approx 25{,}8°$. Wegen 28,1° > 25,8° ist der Wagen folglich in der Lage, zwischen den Punkten *B* und *D* jeden Punkt auf dem Kabel zu erreichen. *Falls zuerst dieser Teil bearbeitet wurde und danach die anderen beiden Abschnitte des Trageseils, so kann auch mit der Skizze und den bisher berechneten Werten argumentiert werden.*		20	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Bestimmung der Trageseillänge *L* im Intervall $-640 \le x \le 640$: $L = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{640} (e^{ax} + e^{-ax}) dx$ $= \frac{1}{a} \cdot \left[e^{ax} - e^{-ax} \right]_0^{640}$ $= \frac{1}{0,00073} \cdot \left[\left(e^{0,00073 \cdot 640} - e^{-0,00073 \cdot 640} \right) - \left(e^0 - e^0 \right) \right]$ $\approx 1327,076...$ Die Kabellänge zwischen den Punkten *B* und *D* beträgt ca. 1 327 m.		15	5
f)	Die direkte Verbindung der Punkte *B* und *C* bzw. *C* und *D* hätte die Länge: $2 \cdot \sqrt{152^2 + 640^2} = 1315,604... \approx 1315$. Die Summe der waagerechten und senkrechten Komponenten des Streckenzuges *BB'C'D* beträgt $2 \cdot (640 + 152) = 1584$. Der in Aufgabenteil e) errechnete Wert für *L* – nämlich ≈ 1327 – liegt zwischen diesen „Grenzen“ und daher in einem realistischen Bereich.			10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

LA/AG 1

II.1 Fischzucht

Die Entwicklung einer bestimmten Fischpopulation in einem Fluss im Laufe eines Jahres beschreibt folgendes Modell:

- Nur aus einem Viertel der Eier schlüpfen junge Fische, die anderen Eier verenden.
  Diese Fische werden nicht älter als drei Jahre.
- Von den jungen Fischen wächst nur einer von 25 in einem Jahr zu einem erwachsenen Fisch heran, der Rest stirbt.
- Jeder zweite erwachsene Fisch überlebt ein weiteres Jahr und zählt dann zur Gruppe der alten Fische.
- Jeder erwachsene Fisch legt 50 Eier. Jeder alte Fisch legt sogar 100 Eier.

$$\text{Benutzen Sie abkürzend:} \left\{ \begin{array}{lcl} N & = & \text{Anzahl der Eier} \\ J & = & \text{Anzahl der jungen Fische} \\ E & = & \text{Anzahl der erwachsenen Fische} \\ A & = & \text{Anzahl der alten Fische} \end{array} \right.$$

a) Stellen Sie das beschriebene Modell mit einem Graphen dar.

b) Die zum Modell gehörende Populationsmatrix P lautet: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 100 \\ 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$.

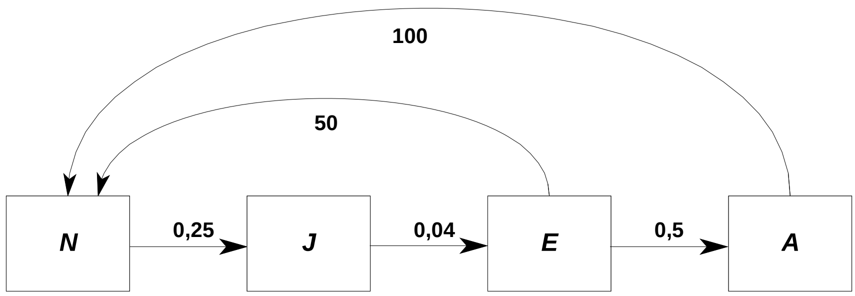
- Interpretieren Sie die erste Zeile der Matrix P im Sachkontext der Aufgabe.
- Geben Sie die Bedeutung des Matrixelements $p_{3,2}$ an.
- Begründen Sie, weshalb die Hauptdiagonale nur Nullen enthält.

c) Die Fischpopulation setzt sich zum Untersuchungszeitpunkt aus 500 Eiern, 50 jungen Fischen, 6 erwachsenen Fischen und 3 alten Fischen zusammen. Berechnen Sie mit Hilfe der Populationsmatrix P die Fischpopulation nach einem und nach zwei Jahren.

d) Ermitteln Sie eine Startpopulation, aus der nach einem Jahr 600 Eier, 100 junge Fische, 3 erwachsene Fische und 4 alte Fische geworden sind.
Berechnen Sie den prozentualen Zuwachs der Fischpopulation.

e) Bestimmen Sie einen Anfangsbestand, der sich jedes Jahr reproduziert und der zusammen 106 junge, erwachsene und alte Fische enthält.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Mit der Bezeichnung aus der Aufgabenstellung ergibt sich folgender Graph:

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die erste Zeile der Populationsmatrix P enthält die Geburtenraten der zugehörigen Altersklassen. Die Geburtenrate ist hier die Anzahl der Eier, die im Laufe eines Jahres von einem Individuum (Ei oder Fisch) in der zugehörigen Altersklasse gelegt wird. Eier und junge Fische bringen keine Eier hervor, weshalb die beiden Matrixelemente $p_{1,1}$ und $p_{1,2}$ jeweils Null sind. Nur erwachsene und alte Fische erzeugen Eier in den angegebenen Stückzahlen ($p_{1,3}$ und $p_{1,4}$).

Das Matrixelement $p_{3,2} = 0{,}04$ gibt die Überlebensrate der jungen Fische an.

Die Hauptdiagonale enthält nur Nullen, da kein Individuum in der zugehörigen Altersklasse verbleibt. Die entsprechenden Anteile sind daher jeweils Null.</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Die Startpopulation wird durch den Vektor $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} N \\ J \\ E \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 50 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Fischpopulation nach einem Jahr:
$\overrightarrow{x_1} = P \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 100 \\ 0{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 50 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 125 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Nach einem Jahr besteht die Population aus 600 Eiern, 125 jungen Fischen, 2 erwachsenen Fischen und 3 alten Fischen.

Fischpopulation nach zwei Jahren: $\overrightarrow{x_2} = P \cdot \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 400 \\ 150 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nach zwei Jahren besteht die Population aus 400 Eiern, 150 jungen Fischen, 5 erwachsenen Fischen und einem alten Fisch.

Alternativ kann der Bestand nach zwei Jahren auch über den Ansatz $\overrightarrow{x_2} = P^2 \cdot \overrightarrow{x_0}$ *errechnet werden.*</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Zur Ermittlung der gesuchten Startpopulation $\overrightarrow{x_0}$ wird folgender Ansatz benutzt: $$\overrightarrow{x_1} = P \cdot \overrightarrow{x_0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 600 \\ 100 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} N \\ J \\ E \\ A \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\lvert \begin{array}{rcl} 600 & = & 50E + 100A \\ 100 & = & 0{,}25N \\ 3 & = & 0{,}04J \\ 4 & = & 0{,}5E \end{array} \right\rvert .$$ Lösen des LGS ergibt: $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 400 \\ 75 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Startpopulation $\overrightarrow{x_0}$ besteht also aus 400 Eiern, 75 jungen Fischen, 8 erwachsenen Fischen und 2 alten Fischen; ihr Gesamtbestand beinhaltet 485 ‚Objekte'. Der Bestand B_1 nach einem Jahr beträgt 707. Somit ergibt sich ein prozentualer Zuwachs von ca. 45,8 %. *Volle Punktzahl wird auch vergeben, falls die Eier nicht zu den Individuen einer Fischpopulation gezählt werden. In diesem Fall ergibt sich ein prozentualer Zuwachs von ca. 25,9 %.*		25	
e)	Möglicher Lösungsweg: Für eine sich reproduzierende Population $\overrightarrow{x^*}$ gilt: $$\overrightarrow{x^*} = P \cdot \overrightarrow{x^*} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} N \\ J \\ E \\ A \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} N \\ J \\ E \\ A \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\lvert \begin{array}{rcl} N & = & 50E + 100A \\ J & = & 0{,}25N \\ E & = & 0{,}04J \\ A & = & 0{,}5E \end{array} \right\rvert .$$ Das LGS hat unendliche viele Lösungen. Mit dem Parameter $t \in \mathbb{N}$ für die Anzahl der alten Fische ergeben sich zunächst unendlich viele Populationsvektoren $\overrightarrow{x^*} = \begin{pmatrix} 200t \\ 50t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$. Die einschränkende Bedingung von zusammen 106 jungen, erwachsenen und alten Fischen führt schließlich auf nur einen möglichen Anfangsbestand $\overrightarrow{x^*}$: $J + E + A = 50t + 2t + t = 53t = 106 \Leftrightarrow t = 2$. Setzt man t = 2 in $\overrightarrow{x^*}$ ein, so folgt: $\overrightarrow{x^*} = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Der Anfangsbestand enthält somit 400 Eier, 100 junge, 4 erwachsene und 2 alte Fische.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Alternativ kann die einschränkende Bedingung gleich beim Aufstellen des LGS berücksichtigt werden: Für die sich reproduzierende Population $\overrightarrow{x^*}$ gilt: $\overrightarrow{x^*} = P \cdot \overrightarrow{x^*} \quad \wedge \quad x_2^* + x_3^* + x_4^* = 106 \quad \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{ccc} N & = & 50E + 100A \\ J & = & 0{,}25N \\ E & = & 0{,}04J \\ A & = & 0{,}5E \\ J+E+A & = & 106 \end{array} \right\|.$ Die Lösung dieses LGS führt auf die o.a. Lösung $\overrightarrow{x^*} = \left(\ 400\,;100\,;4\,;2\ \right)^T$.		10	20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 2

II.2 Sessellift

In einer Gebirgsregion wird die Errichtung eines Sessellifts von einem Urlaubsdorf zu einem Aussichtspunkt geplant. Das Dorf liegt auf einem ebenen horizontalen Plateau. Der Sessellift soll im Dorf beginnen. Der Hang vom Dorf zum Aussichtspunkt ist konkav, so dass das Trageseil direkt vom Dorf zum Aussichtspunkt verlaufen kann. Über diesen Hang, verläuft auch eine waagerechte Telefonleitung, die vom geplanten Sessellift überquert werden muss. Bevor mit dem Bau begonnen werden kann, ist zu prüfen, ob die aus Sicherheitsgründen geforderte Höhendifferenz zwischen dem Seil des Sessellifts (Trageseil) und der Telefonleitung eingehalten wird.

Hinweis: Für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenteile soll vereinfachend davon ausgegangen werden, dass sowohl Telefonleitung als auch Trageseil geradlinig verlaufen, der Durchhang wird also vernachlässigt.

In einem geeigneten Koordinatensystem kann das Plateau beschrieben werden als Teil der x-y-Ebene. Die z-Achse zeigt lotrecht nach oben. Die Längeneinheit sei in allen Richtungen 100 m.

Die Telefonleitung verläuft auf der Geraden durch die Punkte
$F_1\ (-2 \mid -4 \mid 2{,}6)$ und $F_2\ (0 \mid -4 \mid 2{,}6)$.

Zunächst wird geplant, dass der Sessellift im Dorf am Punkt $S\ (-1 \mid -8 \mid 0)$ beginnen soll.

Der Aussichtspunkt hat die Koordinaten $A\ (-1 \mid 10 \mid 12)$.

a) Zeichnen Sie die Punkte F_1, F_2, die Telefonleitung und das geplante Trageseil des Sesselliftes in das beiliegende Koordinatensystem ein (Anlage 1).
Begründen Sie, dass diese Zeichnung für die Bauplanung wenig aussagekräftig ist.

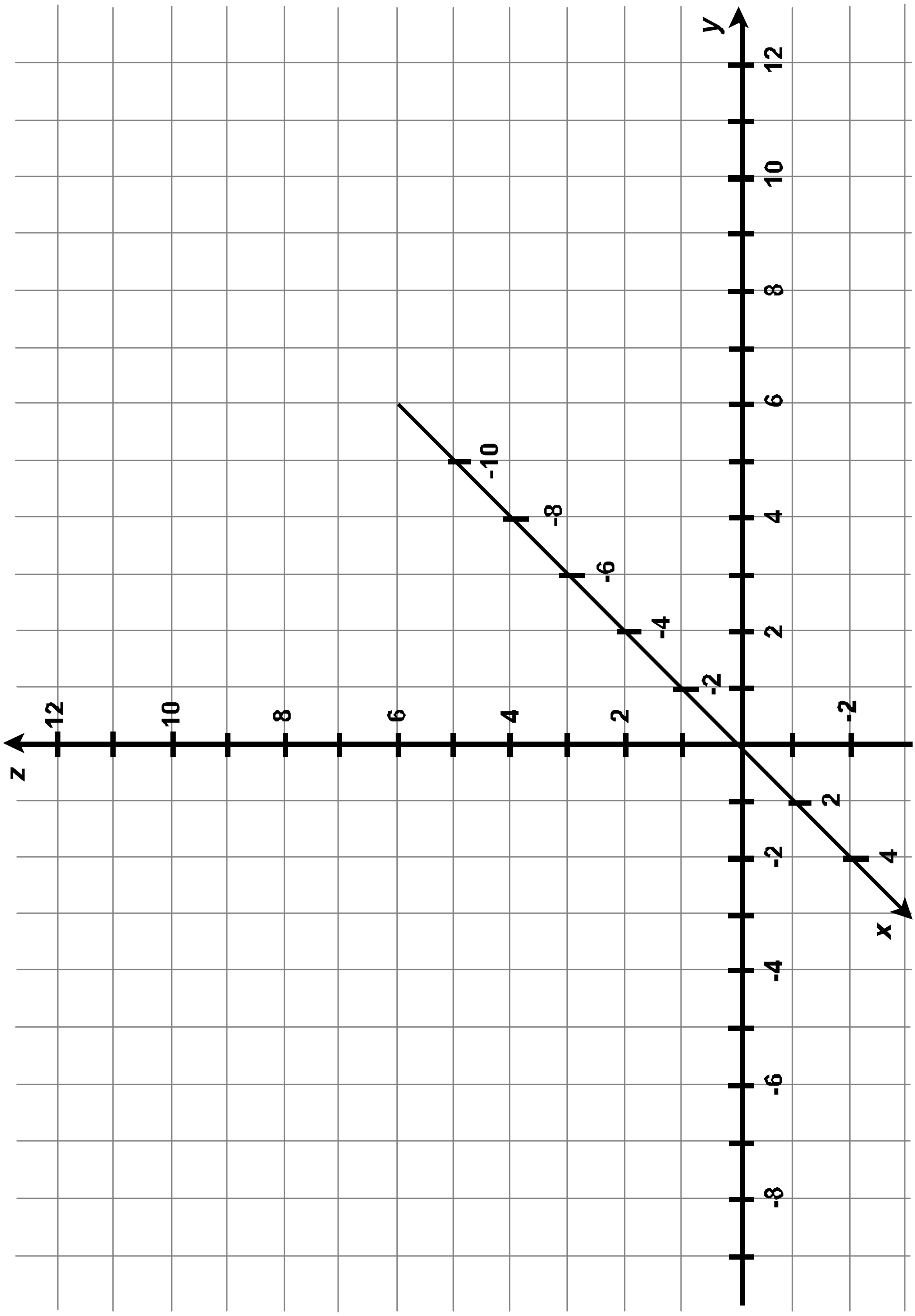
Zeichnen Sie deshalb die Punkte F_1, F_2, die Telefonleitung und das geplante Trageseil des Sesselliftes auch in eine Draufsicht der Gegend (Landkarte) in ein ebenes x-y-Koordinatensystem ein (Anlage 2).

b) Bestimmen Sie den Winkel, den die Telefonleitung und das Trageseil des Sesselliftes in der Draufsicht miteinander bilden.
Bestimmen Sie die Raumkoordinaten des Punktes R auf dem Trageseil, in dem der Sessellift genau über der Telefonleitung verläuft, und entscheiden Sie, ob die geforderte Höhendifferenz von 5 m eingehalten wird.
Begründen Sie, warum vermutlich die Planer den Punkt S so gelegt haben, wie angegeben.

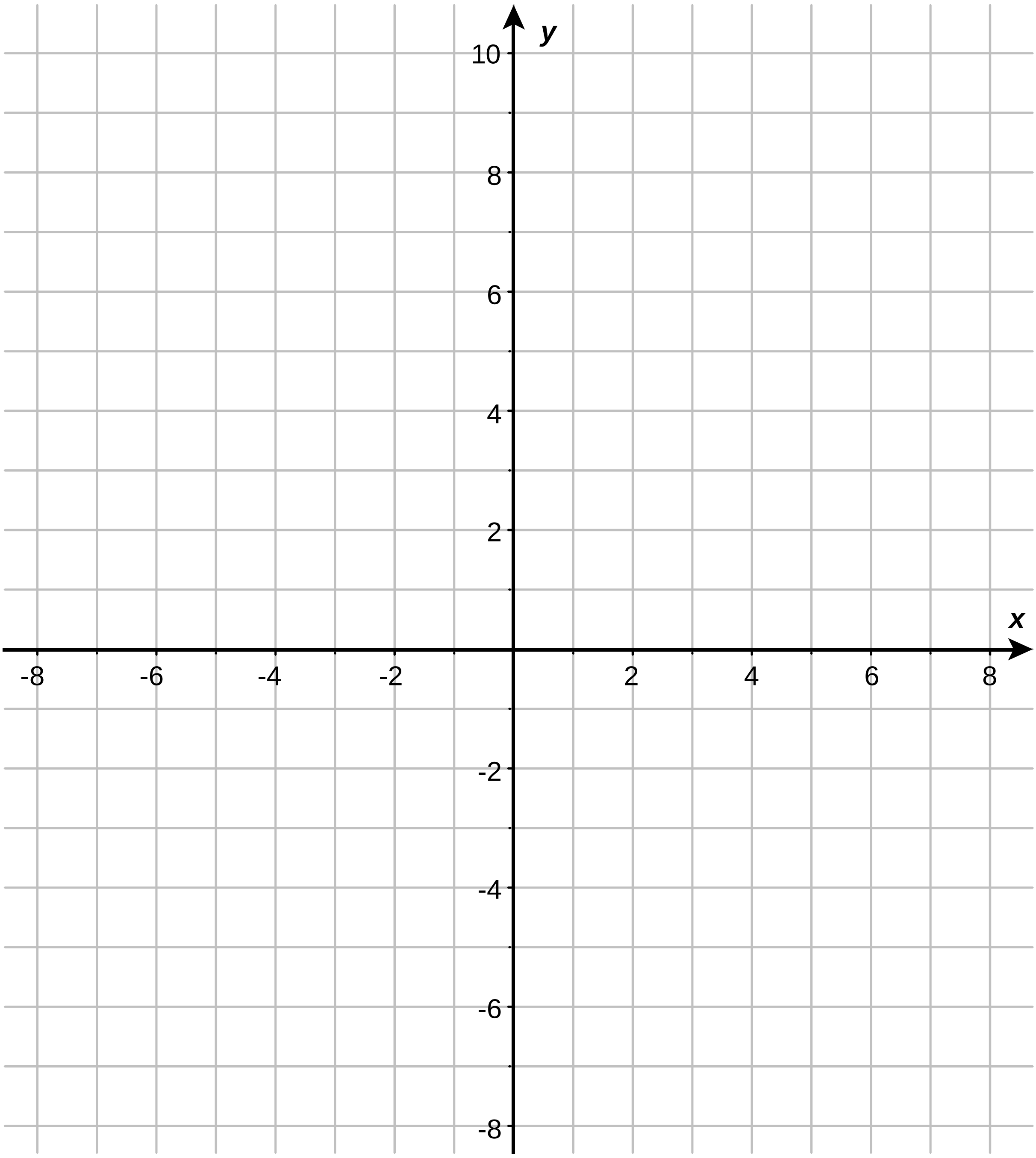
c) Ein Hotel liegt in räumlicher Nähe des geplanten Startpunktes im Punkt $H_1\ (0 \mid -8 \mid 0)$.
Die Besitzer zweier anderer Hotels – $H_2\ (6 \mid -8 \mid 0)$ und $H_3\ (3 \mid -5 \mid 0)$ – im Dorf sehen in dem geplanten Startpunkt einen unzulässigen Vorteil für das erste Hotel und stellen einen Antrag auf Verlegung des Startpunktes. Der Antrag wird vom Gemeinderat angenommen und zwar so, dass der neue Startpunkt des Liftes von allen drei Hotels gleich weit entfernt ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten des neuen Startpunktes und tragen Sie diesen Punkt und das neue Trageseil in die Draufsicht (Anlage 2) ein.

d) Begründen Sie, dass das verlegte Trageseil die Telefonleitung in unveränderter Höhe quert.
Untersuchen Sie auch die Fragen, ob das neu geplante Trageseil länger und ob es steiler als das ursprünglich geplante Trageseil sein müsste.

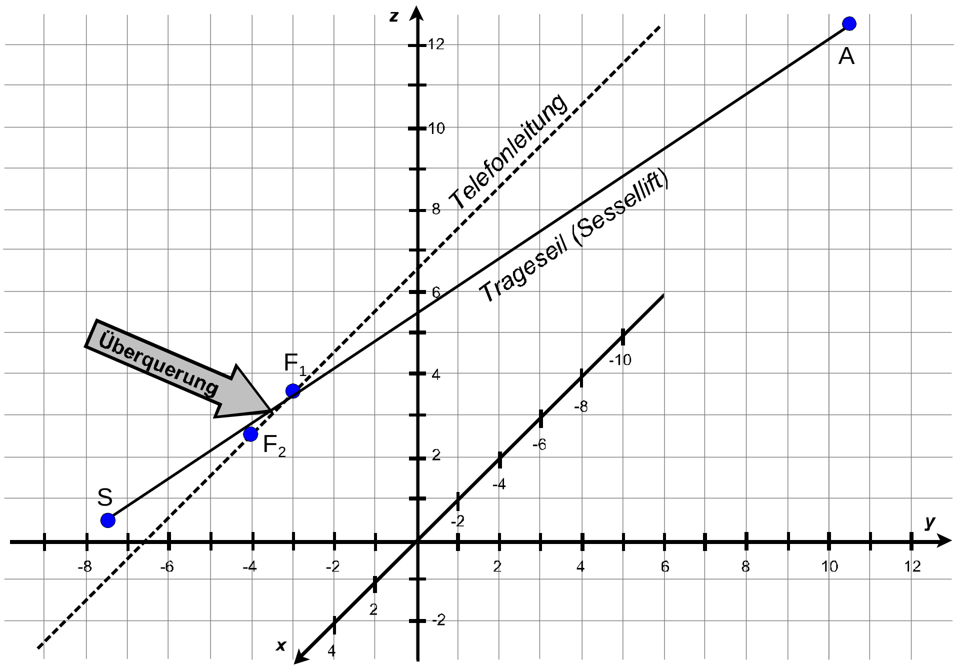
Anlage 1 zur Aufgabe „Sessellift“, Teil a)



Anlage 2 zur Aufgabe „Sessellift“, Teile b) und c)



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	 Diese Skizze ist nicht aussagekräftig, da die Perspektive nichts über den Höhenabstand von Telefonleitung und Trageseil des Sesselliftes aussagt. Auch ist nicht zu erkennen, welchen Winkel Richtungsvektoren dieser beiden Objekte bilden. *Skizze, siehe Lösung zu c).*	10	5	
b)	Telefonleitung und Trageseil verlaufen in der Draufsicht senkrecht zueinander und schneiden sich im Punkt mit den Koordinaten (–1 | –4 | 0). Lotrecht über diesem Punkt muss die Höhendifferenz von Telefonleitung und Trageseil bestimmt werden. Die Telefonleitung hat konstant die Höhe 260 m. Vom Trageseil sind – ausgehend vom Talpunkt *S* – bis zum betrachteten Überquerungspunkt $\frac{4}{18}$ der Gesamtdifferenz in *y*-Richtung erreicht, also auch $\frac{4}{18}$ der Gesamthöhendifferenz von 1200 m, mithin ungefähr 267 m. Die Höhendifferenz von Trageseil und Telefonleitung beträgt also an der Überquerungsstelle ca. 7 m, der geforderte Abstand wird also eingehalten. Für den Punkt *R* gilt: $R\,(-1 \mid -4 \mid 2,\overline{6})$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

<u>*Alternativ:*</u>

Das Trageseil verläuft entlang der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix}$. Zur Bestimmung der Koordinaten von R ist jenes *z* gesucht, für das *y* = –4 gilt:

$$-8 + 18 \cdot \lambda = -4$$
$$18 \cdot \lambda = 4$$
$$\lambda = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich: $\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{18} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$.

Der Punkt *R* hat damit die Koordinaten *R* (–1 | –4 | $2,\overline{6}$). Mit einer Höhe von ca. 267 m liegt er damit knapp 7 m über dem Telefonkabel. Der Abstand wird eingehalten.

Eine andere Wahl des *x*-Wertes für den Startpunkt des Sesselliftes würde bei gleichem *y*-Wert das Trageseil unnötig verlängern und damit zusätzliche Kosten verursachen. Der *y*-Wert sorgt für die Einhaltung eines sinnvollen Abstandes von Trageseil zur Telefonleitung.

</td><td>10</td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Trägt man die Hotelkoordinaten in die 2. Vorlage ein, erkennt man entweder unmittelbar, dass für den neuen Startpunkt *M* des Sesselliftes gilt: *M* (3 | –8 | 0).

Oder man wird die Koordinaten von *M* berechnen:

Wegen der Abstandsbedingung muss *M* auf der Mittelsenkrechten von $\overline{H_1H_2}$ und der Mittelsenkrechten von z.B. $\overline{H_1H_3}$ liegen.

Die Mittelsenkrechte von $\overline{H_1H_2}$ hat die Gleichung $x = 3$.

Die Mittelsenkrechte von $\overline{H_1H_3}$ geht durch den Punkt $\left(\frac{0+3}{2} \,|\, \frac{-8-5}{2} \,|\, 0\right) = \left(1{,}5 \,|\, -6{,}5 \,|\, 0\right)$ und hat die Steigung $m = -\frac{1}{\frac{3}{3}} = -1$.

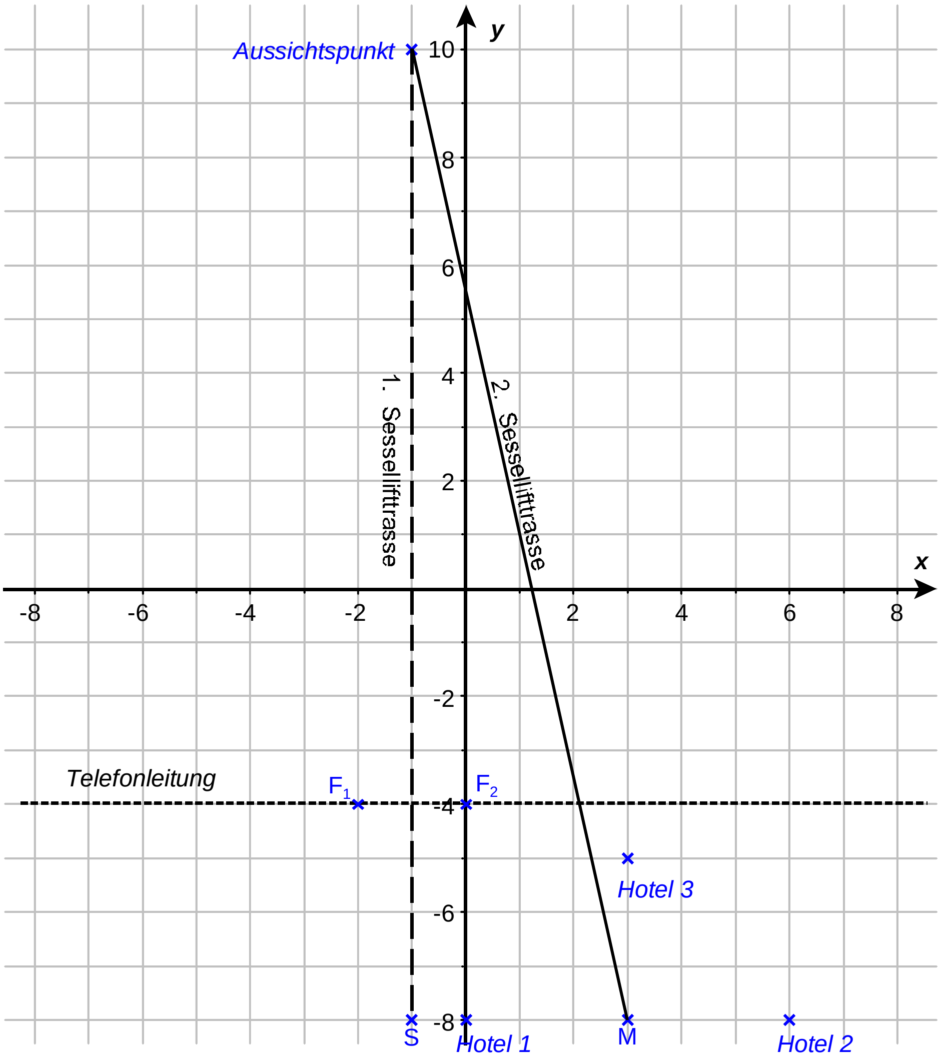
Damit gilt für die Mittelsenkrechte von $\overline{H_1H_3}$:

$-6{,}5 = -1 \cdot 1{,}5 + b$ und $b = -5$, also $y = -x - 5$.

Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{H_1H_3}$ mit der Mittelsenkrechten von $\overline{H_1H_2}$:

Für *x* = 3 erhält man $y = -3 - 5 = -8$. Der Schnittpunkt und damit der Punkt *M* hat die Koordinaten (3 | –8 | 0).

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
			25	
d)	Da *M* und *S* den gleichen *y*-Wert (und natürlich *z*-Wert 0) haben, wiederholt sich die Argumentation bzw. Berechnung von c). Das neue Trageseil überquert die Telefonleitung in gleicher Höhe wie die alte (allgemein gilt dieses Argument für Startpunkte, die auf einer horizontalen Parallelen zur Telefonleitung verlaufen). Man erkennt auch unmittelbar, dass unter den Punkten im Dorf mit gleichem *y*-Wert derjenige mit dem *x*-Wert –1 (dem *x*-Wert von *A*) den kürzesten Abstand zu *A* hat. (*Man kann dabei über den Vergleich von Kathete und Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck MAS argumentieren).* Das Trageseil der neuen Planung ist also länger als das der alten und damit natürlich weniger steil, weil ja die gleiche Höhendifferenz überwunden werden muss.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

III.1 Schrauben — STOCHASTIK 1

Bei einer Firma, die Schrauben herstellt, gibt es zwei Qualitäten, die beide in Kartons zu je 10 000 Stück verpackt werden. Die höhere Qualität A wird zum Beispiel an Maschinenbauer verkauft, bei denen die Exaktheit des Profils sehr wichtig ist. Man weiß, dass 98 % dieser Schrauben ein brauchbares Profil haben. Die mindere Qualität B wird zum Beispiel an Baumärkte verkauft, erfahrungsgemäß sind nur 70 % dieser Schrauben im Profil so exakt, dass z.B. ein Maschinenbauer damit etwas anfangen könnte, für Heimwerker ist dies aber nicht problematisch.

a) Aus einer Kiste der Qualität B werden 10 Schrauben entnommen und auf das Profil geprüft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
- alle Schrauben von brauchbarem Profil sind,
- genau 9 von brauchbarem Profil sind,
- mindestens 8 von brauchbarem Profil sind.

(Kontrollergebnisse: 0,0282; 0,1211 und 0,3828)

Wenn die 10 Schrauben aus einer Kiste der Qualität A entnommen und auf das Profil geprüft werden, gilt entsprechend: P(„alle Schrauben von brauchbarem Profil“) = 0,8171,
P(„genau 9 Schrauben von brauchbarem Profil“) = 0,1667 und
P(„mindestens 8 Schrauben von brauchbarem Profil“) = 0,9991.

Für den Fall, dass eine Kiste ohne Beschriftung ist, hat man keinen Anhaltspunkt, welche Qualität in der Kiste ist, da beide Qualitäten in gleicher Stückzahl produziert werden. Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Kiste der Qualität A handelt, 50 % ist. Es werden nun aus einer Kiste ohne Beschriftung 10 Schrauben entnommen und auf das Profil geprüft.

b) Bestimmen Sie in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, dass
- alle Schrauben von brauchbarem Profil sind
- genau 9 von brauchbarem Profil sind
- mindestens 8 von brauchbarem Profil sind.

c) Nun ergab die Prüfung der 10 Schrauben, dass davon genau 9 ein brauchbares Profil haben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Kiste der Qualität A handelt.

Als Mitarbeiter des Schraubenherstellers werden Sie aufgefordert, eine Entscheidungsregel aufzustellen, mit der auf Grund des Ergebnisses der Prüfung von 10 Schrauben entschieden wird, ob die Kiste als Qualität A oder als Qualität B verkauft werden soll. Eine mögliche Entscheidungsregel ist, dass Sie sich bis zu der Grenze von 8 Schrauben mit brauchbarem Profil für Qualität B entscheiden und bei mehr als 8 brauchbaren Schrauben für Qualität A.

d) Geben Sie die beiden denkbaren Fehlentscheidungen an.

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es bei dieser vorgegebenen Entscheidungsregel zu einer Fehlentscheidung kommt.
Bestimmen Sie ebenso diese Wahrscheinlichkeit für die Grenze 9.
Beurteilen Sie, welche Entscheidungsregel die sinnvollere ist.
Hinweis: Bedenken Sie, dass einerseits die Qualität einer Kiste unbekannt ist und andererseits die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung davon abhängt. (Kontrollergebnis: 0,0828)

Ihr Chef meint, man sollte nicht nur die Wahrscheinlichkeiten betrachten, denn die beiden Fehler sind nicht gleichwertig. Verkauft man fälschlicherweise eine Kiste hoher Qualität als Kiste minderer Qualität, so tritt als Konsequenz eine Erlösminderung ein, also ein Verlust von 600 Euro. Wenn aber einem Maschinenbauer eine minderwertige Qualität geliefert wird, so beträgt als Konsequenz dieser Fehlentscheidung der Verlust für Ihre Firma nach Schätzung Ihres Chefs 1 100 Euro.

f) Ermitteln Sie unter dieser Vorgabe den erwarteten Verlust bei den beiden Entscheidungsregeln aus Teil e) und entscheiden Sie, welches nun die kostengünstigere Grenze ist.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Schrauben brauchbar sind, ist $0{,}7^{10} = 0{,}0282$. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 9 Schrauben brauchbar sind, ist $10 \cdot 0{,}7^9 \cdot 0{,}3 = 0{,}1211$. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 8 Schrauben brauchbar sind, ist $\binom{10}{8} \cdot 0{,}7^8 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}2335$. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 Schrauben brauchbar sind, 0,3828.	15	10	
b)	Hier muss nur zwischen den beiden W. für die Qualitäten gemittelt werden, da die W. für jede Kiste zunächst 0,5 beträgt. $0{,}5 \cdot (0{,}0282 + 0{,}8171) = 0{,}4227$ $0{,}5 \cdot (0{,}1211 + 0{,}1667) = 0{,}1439$ $0{,}5 \cdot (0{,}3828 + 0{,}9991) = 0{,}6910$. *Wenn dieser Teil nicht gelöst werden kann, können dennoch alle weiteren Aufgabenteile bearbeitet werden. Die Mittelwertbildung ist nicht ganz nahe liegend, eigentlich steht ja ein Baumdiagramm dahinter.*		10	
c)	Mittels einem Baumdiagramms, durch das Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten oder aus dem Vergleich der Wahrscheinlichkeiten für „genau 9 brauchbare“ erhält man, dass die Wahrscheinlichkeit für Qualität A $\frac{0{,}1667}{0{,}1667 + 0{,}1211} = 0{,}5792$ beträgt.		20	
d)	Beispielsweise ist Fehler 1, dass man sich für die hohe Qualität entscheidet, obwohl es die mindere Qualität ist. Fehler 2 ist, dass man sich für die mindere Qualität entscheidet, obwohl es die hohe Qualität ist.	10		
e)	Wie in Teil b) muss hier gemittelt werden bzw. ein Baumdiagramm gezeichnet werden. Grenze „genau 9 brauchbare“: Die Wahrscheinlichkeit für Fehler 1 ist 0,0282 und für Fehler 2 ergibt sich 1 – 0,8171 = 0,1829, die Wahrscheinlichkeit ist $0{,}5 \cdot (0{,}0282 + 0{,}1829) = 0{,}1056$. Grenze „genau 8 brauchbare“: Die Wahrscheinlichkeit für Fehler 1 ist 0,0282 + 0,1211 = 0,1493 und für Fehler 2 ergibt sich 1 – 0,8171 – 0,1667 = 0,0162, die Wahrscheinlichkeit ist $0{,}5 \cdot (0{,}1493 + 0{,}0162) = 0{,}0828$. Die Wahrscheinlichkeit ist bei der Grenze „genau 8 brauchbare“ niedriger, also ist das die sinnvollere Entscheidungsregel. *Alle benötigten Wahrscheinlichkeiten sind in Teil a berechnet bzw. in der Aufgabe gegeben; insofern ist hier nur Verständnis und kaum Rechnung gefragt.*		5	10

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>f)</td><td>Hier müssen die Wahrscheinlichkeiten mit den entstehenden Kosten gewichtet werden. Der 1. Fehler kostet 1 100 €, der Fehler 2 aber nur 600 €.

Grenze „genau 9 brauchbare“: Die erwarteten Verluste sind
$0,5 \cdot 0,0282 \cdot 1100\ € + 0,5 \cdot 0,1829 \cdot 600\ € = 70,38\ €$.

Grenze „genau 8 brauchbare“: Die erwarteten Verluste sind
$0,5 \cdot 0,1493 \cdot 1100\ € + 0,5 \cdot 0,0162 \cdot 600\ € = 86,98\ €$.

Die erwarteten Verluste sind bei der Grenze „genau 9 brauchbare“ niedriger, also ist das die sinnvollere Entscheidungsregel.</td><td></td><td>10</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

STOCHASTIK 2

III.2 Sammelbilder

Zur Fußball-WM 2006 gab es ein Sammelalbum, in das 596 verschiedene Bilder eingeklebt werden konnten. Die Bilder wurden in Tüten zu 50 Cent verkauft. In jeder Tüte waren fünf verschiedene Bilder.

a) Jemand behauptet: „Es gibt mehr als 100 Milliarden Möglichkeiten unterschiedliche Tüten zu packen." Untersuchen Sie, ob diese Behauptung (für die Anzahl der Möglichkeiten, fünf verschiedene Bilder in eine Tüte zu packen) stimmt.

Nehmen Sie zunächst an, dass alle Bilder in gleicher Anzahl gedruckt worden wären. Die Verteilung der Bilder auf die Tüten soll vorgenommen werden als zufällige Ziehung ohne Zurücklegen von 5 Bildern aus einem vollständigen Bildersatz (wie die Ziehung von Lottozahlen). Nehmen Sie auch an, dass die einzelnen „ Füllungen" der Tüten stochastisch unabhängig voneinander gewesen wären.

Das Bild von Ronaldinho, dem Weltfußballspieler des Jahres 2005, war ein begehrtes Sammelobjekt.

b) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, das Bild von Ronaldinho beim Kauf einer Sammeltüte zu erhalten, den Wert $\frac{5}{596}$ hatte.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, genau ein Bild von Ronaldinho beim Kauf von drei Sammeltüten zu erhalten.

Wir nehmen jetzt an, dass Spielerbilder von Spielern, die nicht so beliebt waren, vom Verlag häufiger gedruckt und verteilt werden und ebenso die Bilder von besonders beliebten Spielern seltener gedruckt und verteilt werden.
Wir nehmen weiterhin an, dass ein bestimmtes wenig begehrtes Spielerbild mit der Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}02$ in einer Tüte vorkommt.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Spielerbild in zehn zufällig ausgewählten Sammeltüten mindestens einmal enthalten ist.
Vergleichen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit, wenn von allen Bildern gleich viele gedruckt worden wären.

Wir nehmen jetzt weiterhin an, dass 20 besonders beliebte Spieler lediglich jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}001$ in einer Tüte zu finden sind.
Anna hat von diesen 20 besonders beliebten Spielern bereits 12 in ihrer Sammlung.

e) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für Anna, beim Kauf der nächsten Tüte mindestens einen weiteren der ihr noch fehlenden beliebten Spieler vorzufinden, ungefähr 0,8 % beträgt.

f) Anna kauft solange weitere Tüten, bis sie (mindestens) einen weiteren der ihr noch fehlenden beliebten Spieler in ihrem Besitz hat. Bestimmen Sie die Ausgaben, mit denen Anna rechnen muss. Bestimmen Sie dazu die erwartete Anzahl m von Tüten (also einen Erwartungswert!), die Anna noch kaufen muss, bis sie mindestens einen weiteren der 20 beliebten Spieler in ihrer Sammlung hat. Begründen Sie dazu die folgende Gleichung: $m = 1 \cdot 0{,}008 + (1+m) \cdot 0{,}992$.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Für die Anzahl der Möglichkeiten muss $\binom{596}{5}$ berechnet werden. Das Ergebnis ist etwa 616 Milliarden, so dass der Behauptung („...mehr als 100 Milliarden...“) zugestimmt werden muss.	5	10	
b)	Ereignis *R* = „Ronaldinho ist in einer zufällig gezogenen Tüte.“ Für jede Ziehung ist $P(R) = \frac{\binom{595}{4}}{\binom{596}{5}} = \frac{5}{596}$.		15	
c)	Das dreimalige Kaufen von Tüten entspricht einer dreistufigen Bernoulli-Kette in Bezug auf das Vorkommen von „Ronaldinho“. *X* sei die Anzahl der Tüten mit „Ronaldinho“. Dann ist $P(X = 1) = 3 \cdot \left(\frac{5}{596}\right)^1 \cdot \left(\frac{591}{596}\right)^2 \approx 0{,}0247 \approx 2{,}5\%$.	10		
d)	$P_1 = 1 - (0{,}98)^{10} \approx 18\%$ $\qquad$ $P_2 = 1 - \left(\frac{591}{596}\right)^{10} \approx 8\%$ Die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Bild der weniger gefragten Bilder zu bekommen, ist beim Kauf von 10 Tüten durch die „Manipulation“ also von 8 % auf 18 % gestiegen.	10	10	
e)	Anna fehlen noch 8 der beliebten Spieler. Eine nahe liegende und einfache Rechnung besteht darin, den genannten Wert 0,001 mit 8 zu multiplizieren, um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu errechnen, dass Anna in einer Tüte mindestens ein neues beliebtes Bild findet. Dies wäre dann völlig korrekt, wenn das gemeinsame Auftreten von mehreren der noch fehlenden Spieler in einer Tüte ausgeschlossen wäre. Das ist zwar nicht der Fall, aber sehr unwahrscheinlich, so dass diese Rechnung immerhin näherungsweise korrekt ist. *<u>Bemerkung:</u> Man sollte für diesen Aufgabenteil nur die halbe Punktzahl geben, wenn die genannte Rechnung ohne einen entsprechenden Hinweis auf den Näherungscharakter der Lösung erfolgt. Die folgende exakte Lösung wird nicht erwartet:* Einen exakten Wert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man, indem man zunächst die Argumentation von b) umdreht und daraus schließt, dass jeweils von 5000 Bildern je eines der 20 besonderen Bilder gedruckt werden muss.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Man kann dann $\binom{5000}{5}$ gleichwahrscheinliche verschiedene Möglichkeiten betrachten, aus diesen 5000 Bildern eine Tüte zu füllen. Da es unter den 5000 Bildern 8 beliebte Bilder gibt, die Anna noch nicht hat, besteht dann das Gegenereignis dazu, dass Anna in einer Tüte mindestens ein neues beliebtes Bild findet, aus Auswahlen, die keins der 8 noch fehlenden beliebten Bilder enthalten, davon gibt es $\binom{4992}{5}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass Anna in einer Tüte mindestens einen neuen beliebten Spieler vorfindet beträgt also: $P = 1 - \frac{\binom{4992}{5}}{\binom{5000}{5}} = 1 - \frac{4992!}{5!\cdot 4987!}\cdot\frac{5!\cdot 4995!}{5000!} = 1 - \frac{4992\cdot 4991\cdot 4990\cdot 4989\cdot 4988}{5000\cdot 4999\cdot 4998\cdot 4997\cdot 4996}$ $\approx 0{,}798\,\%$.		10	10
f)	Entweder kommt in der ersten gezogenen Tüte ein neuer beliebter Spieler vor, dann beträgt die betrachtete Anzahl 1, oder Anna findet in der ersten Tüte keinen neuen beliebten Spieler, dann ist sie wieder in der Ausgangssituation: bis mindestens ein neuer beliebter Spieler auftaucht, ist die erwartete Anzahl an zu kaufenden Tüten dann aber um 1 größer als *m*. Die Mathematisierung dieser Überlegung führt auf die (lineare) Gleichung $m = 1\cdot 0{,}008 + (1+m)\cdot 0{,}992$, die die Lösung $m = \frac{1}{0{,}008} = 125$ hat. Im Mittel muss Anna also noch 125 Tüten (für 62,5 €) kaufen, bis sie einen weiteren der beliebten Spieler in ihrem Besitz hat.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20